Cálculo Integral

Willian Anthony Granville

Solucionario

$\int$

EDITORIAL "SAN MARCOS"

Find your solutions manual here!

SOLUCIONARIO

CALCULO INTEGRAL

DE: GRANVILLE SMITH

PEDRO CONDOR SALCEDO

LIMA - PERU

SOLUCIONARIO DE CÁLCULO INTEGRAL DE GRANVILLE

Diseño de Portada: Ricardo Arboleda
Composición de interiores: Carolina Hernández
Responsable de la edición: Yisela Rojas

© Jr. Dávalos Lissón 135, Lima
Telefax: 331-1522
RUC 20260100808
E-mail: informes@editorialsanmarcos.com

Primera edición: 2007
Primera reimpresión: 2008
Tiraje: 400 ejemplares

Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú
Reg. N.° 2008-09357
ISBN: 978-9972-38-378-6
Registro de proyecto editorial Nº 31501000800570

Impreso en el Perú / *Printed in Peru*

Pedidos:
Av. Garcilaso de la Vega 974, Lima
Telfs: 331-1535 / 331-0968 / 332-3664
E-mail: ventas@editorialsanmarcos.com

Composición, diagramación e impresión:
Aníbal Paredes Galván
Av. Las Lomas 1600 Mangomarca, S.J.L.
RUC 10090984344

CAPITULO XII

INTEGRACION DE FORMAS ELEMENTALES ORDINARIAS

1ª REGLAS PRINCIPALES PARA LA INTEGRACION:

1) Si $F'(x) = f(x)$, entonces: $\int f(x)dx = F(x) + C$. dónde C = constante arbitraria.

2) $\int kf(x)dx = k \quad f(x)dx$, K es constante.

3) $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(k)dx \pm \int f_2(x)dx$

4) Si $\int f(x)dx = F(x) + C, \quad u = \phi(x)$, se tiene:

$$\int f(u)\,du = \int F(u) + C$$

En particular: $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, \quad a \neq 0$

2ª TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS:

1) $\int (dx + dy - dz) = \int dx + \int dy - \int dz$

2) $\int a\,dx = a\int dx$ 3) $\int dx = x + c$

4) $x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$ (donde: $n \neq -1$)

5) $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ 6) $a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$ $(a > 0)$

7) $\int e^x\,dx = e^x + C$ 8) $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$

9) $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$ 10) $\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C$

11) $\int \csc^2 x\,dx = -\operatorname{ctg} x + C$ 12) $\int \sec x \operatorname{tg} x\,dx = \sec x + C$

13) $\int \csc x \operatorname{ctg} x\,dx = -\csc x + C$

14) $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln \cos x + C = \ln \sec x + C$

15) $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln \operatorname{sen} x + C$

16) $\int \sec x\,dx = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x) + C$

17) $\int \csc x\,dx = \ln(\csc x - \operatorname{ctg} x) + C$

18) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C,$ $a \neq 0$

19) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) + C,$ $a \neq 0,$ $x^2 > a^2$

20) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) + C,$ $x^2 < a^2$, $a \neq 0$

21) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C$ $(a > 0)$

22) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + c$

23) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + C$

24) $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$

Grupo 1: Verificar las siguientes integraciones:

1) $\int x^4\,dx = \frac{x^5}{5} + C$

Puesto que $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \Longrightarrow \int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C$

2) $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C$

3) $\int x^{2/3}\,dx = \frac{3}{5}x^{5/3} + C.$ Análogo al anterior.

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C = \int x^{-1/2}\,dx = \frac{x^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}x^{2/3} + C.$ Análogo al anterior.

6) $\int 3ay^2dy = ay^3 + C = 3a\int y^2dy = 3a\,\frac{y^{2+1}}{2+1} + C.$

7) $\int \frac{2dt}{t^2} = -\frac{2}{t^2} + C.$ Análogo al ejer. Nº 2.

8) $\int \sqrt{ax}\, dx = \dfrac{2x\sqrt{ax}}{3} + C$

$= \sqrt{a} \int \sqrt{x}\, dx = \sqrt{a} \int x^{1/2} dx = \dfrac{2}{3} \sqrt{a} \,.\, x^{3/2} = \dfrac{2}{3} x \sqrt{ax} + C.$

9) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{2x}} = \sqrt{2x} + C.$ Análogo al ejer. Nº 4

10) $\int \sqrt[3]{3t}\, dt = \dfrac{1}{4} (3t)^{4/3} + C.$ Análogo al ejerc. Nº 4

11) $\int (x^{3/2} - 2x^{2/3} + 5\sqrt{x} - 3) dx = \dfrac{2}{5} x^{5/2} - \dfrac{6}{5} x^{5/3} + \dfrac{10}{3} x^{3/2} - 3x + C$

$= \int x^{3/2} dx - 2 \int x^{2/3} dx + 5 \int \sqrt{x}\, dx - 3 \int dx$

$= \dfrac{x^{5/2}}{5/2} - 2 \dfrac{x^{5/3}}{5/3} + 5 \dfrac{x^{3/2}}{3/2} - 3x + C.$

12) $\int \dfrac{4x^2 - 2\sqrt{x}}{x} dx = 2x^2 - 4\sqrt{x} + C = \int x^{-1} (4x^2 - 2x^{1/2}) dx =$

$= \int (4x - 2x^{-1/2}) dx = 4 \int x dx - 2 \int x^{-1/2} dx = 2x^2 - 4x^{1/2} + C$

13) $\int \left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{2}{x^2}\right) dx = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{2}{x} + C = \int \dfrac{x^2}{2} dx - \int \dfrac{2}{x^2} dx =$

$= \dfrac{1}{2} \int x^2 dx - 2 \int \dfrac{dx}{x^2} = \dfrac{1}{6} x^3 + \dfrac{2}{x} + C$

14) $\int \sqrt{x}\, (3x - 2) dx = \dfrac{6}{5} x^{5/2} - \dfrac{4}{3} x^{3/2} + C = \int x^{1/2} (3x - 2) dx =$

$3 \int x^{3/2} - 2 \int x^{1/2} dx = \dfrac{6}{5} x^{5/2} - \dfrac{4}{3} x^{3/2} + C$

15) $\int \left(\dfrac{x^3 - 6x + 5}{x}\right) dx = \dfrac{1}{3} x^3 - 6x + 5 \ln x + C$

Efectuando la división se tiene:

$\int \left(x^2 - 6 + \dfrac{5}{x}\right) dx = \int x^2 dx - 6 \int dx + 5 \int \dfrac{dx}{x} = \dfrac{x^3}{3} - 6x + 5 \ln x + C$

16) $\int \sqrt{(a + bx)}\, dx = \dfrac{2}{3b} (a + bx)^{3/2} + C.$

Sea: $U = a + bx$, por consiguiente: $\dfrac{dU}{b} = dx$

$\therefore \; = \int U^{1/2} \dfrac{dU}{b} = \dfrac{1}{b} \int U^{1/2} dU = \dfrac{2}{3b} U^{3/2} + C = \dfrac{2}{3b} (a + bx)^{3/2} + C$

17) $\int \dfrac{dy}{\sqrt{a - by}} = - \dfrac{2\sqrt{a - by}}{b} + C$

Sea: $U = a - by \quad \therefore \quad - \dfrac{dU}{b} = dy$

$= \int (a - by)^{-1/2} dy = \int u^{-1/2} \left(- \dfrac{du}{b}\right) = - \dfrac{1}{b} \int u^{-1/2} du \neq - \dfrac{2 (a-by)^{1/2}}{b} + C$

18) $\int (a + bt)^2\, dt = \dfrac{(a + bt)^3}{3b} + C.$ Análogo al ejer. Nº 16

19) $\int x(2 + x^2)^2 dx = \dfrac{(2 + x^2)^3}{6} + C,$ haciendo $u = 2 + x^2$, etc.

20) $\int y(a - by^2) dy = - \dfrac{(a - by^2)^2}{4b} + C,$ hacer $u = a - by^2$, etc.

21) $\int t \sqrt{2t^2 + 3}\, dt = \dfrac{(2t^2 + 3)^{3/2}}{6} + C,$ hacer $u = 2t^2 + 3$, etc.

22) $\int x(2x + 1)^2 dx = x^4 + \dfrac{4}{3} x^3 + \dfrac{x^2}{2} + C = \int x(4x^2 + 4x + 1) dx =$

$$= \int 4x^3dx + 4\int x^2dx + \int xdx = x^4 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{x}{2} + C$$

23) $\int \frac{4x^2dx}{\sqrt{x^3+8}} = \frac{8\sqrt{x^3+8}}{3} + C$

Sea: $u = x^3 + 8$, de donde: $\frac{du}{3} = x^2dx$, en la integral se tiene:

$$= 4\int \frac{du/3}{u^{1/2}} = \frac{4}{3}\int \frac{du}{u^{1/2}} = \frac{4}{3}\int u^{-1/2}du = \frac{4}{3}.2u^{1/2} + C = \frac{8}{3}(x^3+8)^{1/2} + C$$

24) $\int \frac{6zdz}{(5-3z^2)^2} = \frac{1}{5-3z^2} + C$

Sea: $u = 5 - 3z^2$ $\therefore$ $du = -6zdz$

$$= \int \frac{-du}{u^2} = -\int u^{-2}du = -\frac{u^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{5-3z^2} + C$$

25) $\int (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2 dx = ax - \frac{4x\sqrt{ax}}{3} + \frac{x^2}{2} + C$

$$\int (a - 2\sqrt{ax} + x)dx = \int adx - 2\int \sqrt{ax}dx + \int xdx$$

$$= a\int dx - 2\sqrt{a}\int x^{1/2}dx + \int xdx = ax - \frac{4}{3}\sqrt{a}.\,x^{3/2} + \frac{1}{2}x^2 + C$$

26) $\int \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}dx = -\frac{2(\sqrt{a}-\sqrt{x})^3}{3} + C$

Sea: $u = \sqrt{a} - \sqrt{x} \rightarrow -2du = \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

$$= \int u^2(-2du) = -2\int u^2du = -\frac{2}{3}u^3 + C = -\frac{2}{3}(\sqrt{a}-\sqrt{x})^3 + C$$

27) $\int \sqrt{x}(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2 dx = \frac{2ax^{3/2}}{3} - x^2\sqrt{a} + \frac{2x^{5/2}}{5} + C$

$$= \int x^{1/2}(a - 2\sqrt{a}\sqrt{x} + x)dx = a\int x^{1/2}dx - 2\sqrt{a}\int x\,dx + \int x^{3/2}dx$$

$$= \frac{2}{3}ax^{3/2} - \sqrt{a}\,x^2 + \frac{2}{5}x^{5/2} + C$$

28) $\int \frac{t^3dt}{\sqrt{a^4+t^4}} = \frac{\sqrt{a^4+t^4}}{2} + C$

Sea : $u = a^4 + t^4 \rightarrow \frac{du}{4} = t^3dt$

$$= \int u^{-1/2}\frac{du}{4} = \frac{1}{4}\int u^{-1/2}du = \frac{1}{2}u^{1/2} + C = \frac{1}{2}(a^4+t^4)^{1/2} + C$$

29) $\int \frac{dy}{(a+by)^3} = -\frac{1}{2b(a+by)^2} + C.$ Análogo al ejer. Nº 24

30) $\int \frac{xdx}{(a+bx^2)^3} = -\frac{1}{4b(a+bx^2)^2} + C.$ Análogo al ejer. Nº 24

31) $\int \frac{t^2dt}{(a+bt^3)^2} = -\frac{1}{3b(a+bt^3)} + C$ Análogo al ejer. Nº 24

32) $\int z(a+bz^3)^2dz = \frac{a^2z^2}{2} + \frac{2abz^5}{5} + \frac{b^2z^8}{8} + C$

$$= \int z(a^2 + 2abz^3 + b^2z^6)dz = a^2\int zdz + 2ab\int z^4dz + b^2\int z^7dz$$

$$= \frac{a^2z^2}{2} + \frac{2abz^5}{5} + \frac{b^2z^8}{8} + C$$

33) $\int x^{n-1}\sqrt{a+bx^n}\,dx = \frac{2(a+bx^n)^{3/2}}{3nb} + C$

Sea: $u = a + bx^n \rightarrow du = bnx^{n-1}dx$

$$\therefore \int u^{1/2}\,\frac{du}{bn} = \frac{1}{bn}\int u^{1/2}\,du = \frac{2}{3nb}\,.u^{3/2} + C = \frac{2}{3nb}\,(a + bx^{n})^{3/2} + C$$

34) $\displaystyle\int \frac{(2x + 3)\,dx}{\sqrt{x^2 + 3x}} = 2\sqrt{x^2 + 3x} + C,$ hacer: $u = x^2 + 3x$, etc.

35) $\displaystyle\frac{(x^2 + 1)\,dx}{\sqrt{x^3 + 3x}} = \frac{2\sqrt{x^3 + 3x}}{3} + C$

Sea: $u = x^3 + 3x \quad \therefore \quad du = (3x^2 + 3)\,dx \rightarrow \frac{du}{3} = (x^2 + 1)\,dx$

$$\int \frac{du/3}{u^{1/2}} = \frac{1}{3}\int u^{-1/2}\,du = \frac{2}{3}u^{1/2} + C = \frac{2}{3}\,(x^3 + 3x)^{1/2} + C$$

36) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\,dx = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C\,;\quad u = \operatorname{sen} x \rightarrow du = \cos x\,dx$

$$\int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{(\operatorname{sen} x)^3}{3} = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$$

37) $\displaystyle\int \frac{(2 + \ln x)}{x}\,dx = \frac{(2 + \ln x)^2}{2} + C$

Sea: $u = 2 + \ln x \rightarrow du = \frac{dx}{x}$

$$\int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(2 + \ln x)^2}{2} + C$$

38) $\displaystyle\int \operatorname{sen} ax \cos ax\,dx = \frac{\operatorname{sen}^2 ax}{2a} + C$

Sea: $u = \operatorname{sen} ax$ de donde: $\frac{du}{a} = \cos ax\,dx$

$$\int \frac{u\,du}{a} = \frac{1}{2a}\,u^2 + C = \frac{1}{2a}(\operatorname{sen} ax)^2 + C = \frac{1}{2a}\operatorname{sen}^2 ax + C$$

39) $\displaystyle\int \operatorname{sen} 2x \cos^2 2x\,dx = -\frac{\cos^3 2x}{6} + C$

Solución.

Haciendo la siguiente sustitución:

$\cos 2x = v \rightarrow dv = -2\operatorname{sen} 2x\,dx$, en la integral se tiene:

$$\int v^2\left(-\frac{dv}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int v^2 dv = -\frac{1}{2}\,\frac{v^3}{3} + C = \frac{-\cos^3 2x}{6} + C$$

40) $\displaystyle\int \operatorname{tg}\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx = \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + C$

Solución.

Sea: $u = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \rightarrow du = \sec^2\frac{x}{2}\left(\frac{1}{2}\right)dx \rightarrow 2du = \sec^2\frac{x}{2}\,dx$

Se tiene:

$$= 2\int u\,du = 2\,.\,\frac{u^2}{2} + C = \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + C$$

41) $\displaystyle\int \frac{\cos ax\,dx}{\sqrt{b + \operatorname{sen} ax}} = \frac{2\sqrt{b + \operatorname{sen} ax}}{a} + C$

Solución.

$u = b + \operatorname{sen} ax \rightarrow du = a\cos ax \rightarrow \frac{du}{a} = \cos ax\,dx$

$$= \int (b + \operatorname{sen} ax)^{-1/2}\cos ax\,dx = \frac{1}{a}\int u^{-1/2}\,du = \frac{2}{a}\,u^{1/2} + C =$$

$$= \frac{2}{a}\,(b + \operatorname{sen} ax)^{1/2} + C$$

42) $\displaystyle\int \left(\frac{\sec x}{1 + \operatorname{tg} x}\right)^2 dx = -\frac{1}{1 + \operatorname{tg} x} + C$

Solución.

$$= \int \frac{\sec^2 x}{(1 + \operatorname{tg} x)^2}\,dx = \int (1 + \operatorname{tg} x)^{-2}\,d(1 + \operatorname{tg} x) =$$

$$= -(1 + \operatorname{tg} x)^{-1} + C = -\frac{1}{1 + \operatorname{tg} x}$$

43) $\displaystyle\int \frac{dx}{2 + 3x} = \frac{\ln(2 + 3x)}{3} + C$

Solución.

Sea: $u = 2 + 3x \rightarrow \frac{du}{3} = dx$, reemplazando en la integral se tiene:

$$\rightarrow \int \frac{du}{3u} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3}\ln(u) + C = \frac{1}{3}\ln(2 + 3x) + C$$

45) $\displaystyle\int \frac{tdt}{a + bt^2} = \frac{\ln(a + bt^2)}{2b} + C$

Solución.

Sea: $v = a + bt^2 \Longrightarrow \frac{dv}{2b} = tdt$, reemplazando en la integral se tiene

$$\int \frac{dv}{2bv} = \frac{1}{2b}\int \frac{dv}{v} = \frac{1}{2b}\ln v + C = \frac{1}{2b}\ln(a + bt^2) + C$$

46) $\displaystyle\int \frac{2x + 3}{x^2 + 3x}dx = \int \frac{d(x^2 + 3x)}{x^2 + 3x} = \ln(x^2 + 3x) + C$

47) $\displaystyle\int \frac{y + 2}{y^2 + 4y}dy = \frac{\ln(y^2 + 4y)}{2} + C$

Solución.

Multiplicando y dividiendo por 2 se obtiene una integral directa:

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2y + 4}{y^2 + 4y}dy = \frac{1}{2}\int \frac{d(y^2 + 4y)}{y^2 + 4y} = \frac{1}{2}\ln(y^2 + 4y) + C$$

48) $\displaystyle\int \frac{e^\theta d^\theta}{a + b e^\theta} = \frac{\ln(a + b e^\theta)}{b} + C$

Solución :

Multiplicando y dividiendo por b se obtiene una integral directa :

$$= \frac{1}{b}\int \frac{b e^\theta d\theta}{a + b e^\theta} = \frac{1}{b}\int \frac{d(a + b e^\theta)}{a + b e^\theta} = \frac{1}{b}\ln(a + b e^\theta) + C$$

49) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{1 - \cos x} = \int \frac{d(1 - \cos x)}{1 - \cos x} = \ln(1 - \cos x) + C$

50) $\displaystyle\int \frac{\sec^2 y dy}{1 + b \operatorname{tg} y} = \frac{1}{b}\ln(a + b \operatorname{tg} y) + C$

Solución.

Sea: $u = 1 + b \operatorname{tg} y \longrightarrow \frac{du}{b} = \sec^2 y dy$, reemplazando en la integral se tiene:

$$= \int \frac{du}{bu} = \frac{1}{b}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{b}\ln(u) + C = \frac{1}{b}\ln(1 + b\operatorname{tg} y) + C$$

51) $\displaystyle\int \frac{2x + 3}{x + 2}dx = 2x - \ln(x + 2) + C$

Solución.

Por división de polinomios se tiene:

$$\int \frac{2x + 3}{x + 2}dx = \int (2 - \frac{1}{x + 2})dx = 2\int dx - \int \frac{dx}{x + 2} =$$

$$= 2x - \ln(x + 2) + C$$

52) $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2}{x + 1}dx = \frac{x^2}{2} - x + 3\ln(x + 1) + C$

Solución.

$\frac{x^2 + 2}{x + 1} = x - 1 + \frac{3}{x + 1}$, reemplazando en la integral se tiene:

$$= \int (x - 1 + \frac{3}{x + 1})dx = \int xdx - \int dx + 3\int \frac{dx}{x + 1} =$$

$$= x^2/2 - x + 3\ln(x + 1) + C$$

53) $\displaystyle\int \frac{x+4}{2x+3}\,dx = \frac{x}{2} + \frac{5\ln(2x+3)}{4} + C$

Solución :

$$\frac{x+4}{2x+3} = \frac{1}{2} + \frac{5/2}{2x+3}$$, reemplazando en la integral se tiene:

$$\int \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2(2x+3)}\right)dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{2x+3} = \frac{x}{2} + \frac{5}{4}\ln(2x+3)+C$$

54) $\displaystyle\int \frac{e^{2s}\,ds}{e^{2s}+1} = \frac{1}{2}\ln(e^{2s}+1) + c\,C$

Solución :

Multiplicando y dividiendo por 2 se obtiene una integral directa:

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2s}\,ds}{e^{2s}+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(e^{2s}+1)}{e^{2s}+1} = \frac{1}{2}\ln(e^{2s}+1) + C$$

55) $\displaystyle\int \frac{ae^{\theta}+b}{ae^{\theta}-b}\,d\theta = 2\ln(ae^{\theta}-b) - \theta + C$

Solución.

$$\frac{ae^{\theta}+b}{ae^{\theta}-b} = 1 + \frac{2b}{ae^{\theta}-b}$$, reemplazando en la integral se tiene:

$$= \int\left(1 + \frac{2b}{ae^{\theta}-b}\right)d\theta = \int d\theta + 2\int \frac{b}{ae^{\theta}-b}\,d\theta = \int d\theta + 2\int \frac{e^{-\theta}\,b\,d\theta}{a - e^{-\theta}\,b}$$

$$= \theta + 2\int \frac{d(a-be^{-\theta})}{a-be^{-\theta}} = \theta + 2\ln(a-be^{-\theta}) + C = \theta + 2\ln\left(\frac{ae^{\theta}-b}{e^{\theta}}\right) + C$$

$$= \theta + 2\ln(ae^{\theta}-b) - 2\theta\,\ln e + C = 2\ln(ae^{\theta}-b) - \theta + C$$

Determinar el valor de c/u de las sgtes. integrales y verificar los result. por diferenciación.

57) $\displaystyle\int (x^3+3x^2)\,dx = \int x^3 dx + 3\int x^2 dx = \frac{x^4}{4} + x^3 + C$

$$d\left(\frac{x^4}{4} + x^3 + C\right) = (x^3+3x^2)\,dx$$

58) $\displaystyle\int \frac{x^2-4}{x^4}\,dx = \int \frac{dx}{x^2} - 4\int \frac{dx}{x^4} = \int x^{-2}dx - 4\int x^{-4}dx =$

$$= -x^{-1} + \frac{4x^{-3}}{3} + C$$

diferenciando:

$$d\left(-x^{-1} + \frac{4}{3}x^{-3} + C\right) = (x^{-2} - 4x^{-4})\,dx$$

59) $\displaystyle\int \left(\frac{5x}{5} + \frac{5}{5x}\right)dx = \int \frac{\sqrt{5}\sqrt{x}}{5}\,dx + \int \frac{5\,dx}{\sqrt{5}\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{5}}{5}\int (x)^{1/2}\,dx +$

$$\sqrt{5}\int x^{-1/2}\,dx = \frac{\sqrt{5}}{5}\,\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + \sqrt{5}\,\frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3\sqrt{5}}\,x^{3/2} + 2\sqrt{5}\,x^{1/2} + C$$

diferenciando se tiene:

$$d\left(\frac{2}{3\sqrt{5}}x^{3/2} + 2\sqrt{5}\,x^{1/2} + C\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3\sqrt{5}}\,x^{1/2} + 2\sqrt{5}\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5}\sqrt{x} + \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{x}}$$

60) $\displaystyle\int \sqrt[3]{by^2}\,dy = ?$

Solución.

$$= \int \sqrt[3]{b}\cdot y^{2/3}\,dy = \sqrt[3]{b}\int y^{2/3}\,dy = \sqrt[3]{b}\,\frac{y^{5/3}}{5/3} + C = \frac{3\sqrt[3]{b}\,y^{5/3}}{5} + C$$

diferenciando se tiene:

$$d\left(3\sqrt[3]{b}\,\frac{y^{5/3}}{5} + C\right) = \frac{3\sqrt[3]{b}}{5}\cdot\frac{5}{3}\cdot y^{2/3} = \sqrt[3]{b}\cdot y^{2/3}\,dy$$

61) $\displaystyle\int \frac{dt}{t\sqrt{2t}} = ?$

Solución.

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{2}\sqrt{t^3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{t^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int t^{-3/2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\;\frac{t^{-1/2}}{-\frac{1}{2}} + C =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{2}}\, t^{-1/2} + C = -\sqrt{2}\, t^{-1/2}$$

diferenciando se tiene:

$$d(-\sqrt{2}\,.\, t^{-1/2}) = -\sqrt{2}.\,(-\tfrac{1}{2})(t^{-3/2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.\,\frac{1}{t^{3/2}}\,dt$$

62) $\int \sqrt{2 + 3x}\, dx =$

multiplicando y dividiendo por -3 se tiene:

$$= -\frac{1}{3}\int (2-3x)^{1/2}(-3)\,dx = -\frac{1}{3}\int (2-3x)^{1/2}\, d(2-3x) = -\frac{1}{3}\,\frac{(2-3x)^{3/2}}{3/2}$$

$$= -\frac{2}{9}(2-3x)^{3/2} + C$$

diferenciando se tiene:

$$d(-\tfrac{2}{9}(2-3x)^{3/2} + C) = -\frac{2}{9}\,.\,\frac{3}{2}(2-3x)^{1/2}(-3)\,dx = (2-3x)^{1/2}\,dx$$

Determinar el valor de c/u de las sgtes integrales y comprobar los resultados por diferenciación:

63) $\int \frac{\text{sen } 2\theta\, d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} =$

Solución.

Sea: $u = \cos 2\theta \rightarrow -\frac{du}{2} = \text{sen } 2\theta\, d\theta$, reemplazando en la integral se tiene:

$$= \int u^{-1/2}(-\tfrac{du}{2}) = -\frac{1}{2}\int u^{-1/2}\,du = -\frac{1}{2}\,.\,\frac{u^{1/2}}{1/2} + C = -(\cos 2\theta)^{1/2} + C$$

diferenciando se tiene:

$$d[-(\cos 2\theta)^{1/2} + C] = -\frac{1}{2}(\cos 2\theta)^{-1/2}(-\text{sen } 2\theta)(2)\,d\theta = \frac{\text{sen } 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\,d\theta$$

64) $\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{e^x - 5}} = \int (e^x - 5)^{-1/2}\, d(e^x - 5) = 2(e^x - 5)^{1/2} + C$

diferenciando se tiene:

$$d\,[(2(e^x - 5)^{1/2} + C] = \frac{1}{2}.2(e^x - 5)^{-1/2}\, e^x = ((e^x - 5)^{-1/2}\, e^x)\,dx$$

65) $\int \frac{2dx}{\sqrt{3 + 2x}} = \int (3 + 2x)^{-1/2}\, d(3 + 2x) = 2(3 + 2x)^{1/2} + C$

diferenciando:

$$d\,[2(3 + 2x)^{1/2} + C] = 4.\frac{1}{2}(3 + 2x)^{-1/2}\,dx = 2(3 + 2x)^{-1/2}\,dx$$

66) $\int \frac{3\,dx}{2 + 3x} = \ln(2 + 3x) + C$

diferenciando se tiene:

$$d\,[\ln(2 + 3x) + C] = \frac{3\,dx}{2 + 3x}$$

67) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1 - x^2}} = ?$

Solución.

Sea: $v = 1 - x^2 \longrightarrow -\frac{dv}{2} = xdx$, reemplazando en la integral se tiene:

$$\int x(1 - x^2)^{-1/2}\,dx = -\frac{1}{2}\int v^{-1/2}\,dV = -\frac{1}{2}\cdot\frac{v^{1/2}}{1/2} + C = -\frac{2}{2}(1-x^2)^{1/2} + C$$

diferenciando se tiene

$$d\left[-\frac{2}{2}(1 - x^2)^{1/2} + C\right] = -\frac{1}{2}(1 - x^2)^{-1/2}(-2x)\,dx = (1 - x^2)^{-1/2}\,xdx$$

68) $\int \frac{t\,dt}{3t^2 + 4} \equiv ?$

Solución.

Multiplicando y dividiendo por 6 se tiene una integral directa:

$$= \frac{1}{6}\int \frac{6\,t\,dt}{3t^2 + 4} = \frac{1}{6}\int \frac{d(3t^2 + 4)}{3t^2 + 4} = \frac{1}{6}\ln(3t^2 + 4) + C$$

diferenciando se tiene:

$$d\left[\frac{1}{6}\ln(3t^2 + 4) + C\right] = \frac{1}{6}\,\frac{6t}{3t^2 + 4}\,dt = \frac{t\,dt}{3t^2 + 4}$$

69) $\int (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^2 \, dx = ?$

Solución.

$$= \int (x - 2 + \frac{1}{x})dx = \int xdx - 2\int dx + \int \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln x + C$$

diferenciando tenemos:

$$d[\frac{x^2}{2} - 2x + \ln x + C] = (x - 2 + \frac{1}{x})dx$$

70) $\int (y^2 - \frac{1}{y^2})^3 \, dy = ?$

Solución :

efectuando operaciones se tiene:

$$= \int (y^6 - 3y^4 \cdot \frac{1}{y^2} + 3y^2 \cdot \frac{1}{y^4} - \frac{1}{y^6})dy = \int y^6 dy - 3\int y^2 dy +$$

$$3\int \frac{dy}{y^2} - \int \frac{dy}{y^6} = \frac{y^7}{7} - \frac{3y^3}{3} - 3y^{-1} - \frac{y^{-5}}{-5} + C = \frac{y^7}{7} - y^3 - \frac{3}{y} + \frac{1}{5y^5} + C$$

$$d\left[\frac{y^7}{7} - y^3 - \frac{3}{y} + \frac{1}{5y^5} + C\right] = (y^6 - 3y^2 - (-1)\frac{3}{y^2} - \frac{25y^4}{25y^{10}})\, dx$$

71) $\int \frac{\text{sen } a\,\theta \, d\,\theta}{\cos a\,\theta + b} = ?$

Solución :

Sea $y = \cos a\,\theta + b \to -\frac{dy}{a} = \text{sen } a\,\theta \, d\,\theta$, reemplazando en la integral

$$\int \frac{-dy/a}{y} = -\frac{1}{a}\int \frac{dy}{y} = -\frac{1}{a}\ln y + C = -\frac{1}{a}\ln(\cos a\,\theta + b) + C$$

$$d(-\frac{1}{a}\ln(\cos a\,\theta + b) + C) = (-\frac{1}{a} \cdot \frac{(-\text{sen } a\,\theta)(a)}{\cos a\theta + b}) \quad d\theta =$$

$$= (\frac{\text{sen } a\theta \, d\theta}{\cos a\theta + b})d\theta$$

72) $\int \frac{\csc^2\phi \;\; d\phi}{\sqrt{2 \text{ ctg } \phi + 3}}$?

Solución :

Sea: $w = 2\text{ctg}\phi + 3 \qquad -\frac{dw}{2} = \csc^2\phi \; d\phi$, reemplazando en la integral:

$$\int \frac{-dw/2}{\sqrt{w}} = -\frac{1}{2}\int w^{-1/2} \, dw = -\frac{1}{2}\,\frac{w^{1/2}}{1/2} + C = -w^{1/2} + C = -(2\text{ctg}\phi + 3)^{1/2} + C$$

$$d[-(2\text{ ctg}\phi + 3)^{1/2} + C] = \frac{-(-2\csc^2\phi)d\phi}{2(2\text{ctg}\phi + 3)^{1/2}} = \frac{\csc^2\phi d\phi}{(2\text{ ctg}\phi + 3)^{1/2}}$$

73) $\int \frac{2x + 5}{x^2 + 5x + 6} \, dx = \ln(x^2 + 5x + 6) + C$

$$d[\ln(x^2 + 5x + 6)] + C = \frac{(2x + 5)dx}{x^2 + 5x + 6}$$

74) $\int \frac{(2x + 7)dx}{x + 3} = ?$

Solución.

$\frac{2x + 7}{x + 3} = 2 + \frac{1}{x + 3}$, reemplazando en la integral.

$$= \int (2 + \frac{1}{x + 3})dx = 2\int dx + \int \frac{dx}{x + 3} = 2x + \ln(x + 3) + C$$

$$d(2x + \ln(x + 3) + C) = (2 + \frac{1}{x + 3})dx$$

75) $\int \frac{x^2 + 2}{x + 2} = ?$

Solución :

$\frac{x^2 + 2}{x + 2} = x - 2 + \frac{6}{x + 2}$, reemplazamos en la integral:

$$= \int (x - 2 + \frac{6}{x + 2})dx = \int xdx - 2\int dx + 6\int \frac{dx}{x + 2} =$$

$$\frac{x^2}{2} - 2x + 6\ln(x + 2) + C$$

$$d[\frac{x^2}{2} - 2x + 6\ln(x + 2) + C] = (x - 2 + \frac{6}{x + 2})dx = (\frac{x^2 + 2}{x + 2})\, dx$$

76) $\int \frac{x^3 + 3x}{x^2 + 1} \, dx = ?$

Solución :

$$\int (x + \frac{2x}{x^2+1})dx = \int xdx + 2\int \frac{x}{x^2+1}\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + \ln(x^2 + 1) + C$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2x + \ln(x^2+1) + C$$

$$d\left(\frac{x^2}{2} + 2x + \ln(x^2+1) + C\right) = \left(x + 2 + \frac{2x}{x^2+1}\right)dx$$

77) $\int \frac{(4x+3)dx}{\sqrt[3]{1+3x+2x^2}} = \int (1+3x+2x^2)^{-1/3}\, d(1+3x+2x^2) =$

$$\frac{3}{2}(1+3x+2x^2)^{2/3} + C. \quad (w)$$

$$d\left(\frac{3}{2}(1+3x+3x^2)^{2/3} + C\right) = (4x+3)(1+3x+2x^2)^{-1/3}\,dx$$

78) $\int \frac{(e^t+2)dt}{e^t+2t} = \ln(e^t+2t) + C \quad (w)$

$$d(\ln(e^t+2^t) + C) = \left(\frac{e^t+2}{e^t+2t}\right)dt$$

79) $\int \frac{(e^x + \operatorname{sen} x)dx}{\sqrt{e^x - \cos x}} = \int (e^x - \cos x)^{-1/2}\, d(e^x - \cos x) =$

$$= 2(e^x - \cos x)^{1/2} + C \quad (w)$$

$$d(2(e^x - \cos x)^{1/2} + C) = 2\cdot\frac{1}{2}(e^x - \cos x)^{-1/2}(e^x + \operatorname{sen} x)dx$$

$$= (e^x - \cos x)^{-1/2}(e^x + \operatorname{sen} x)$$

80) $\int \frac{\sec 2\theta \operatorname{tg} 2\theta\, d\theta}{3\sec 2\theta - 2} = ?$

Solución :
Multiplicando y dividiendo por 6 se obtiene una integral directa:

$$= \frac{1}{6}\int \frac{6\sec 2\theta \operatorname{tg} 2\theta\, d\theta}{3\sec 2\theta - 2} = \frac{1}{6}\int \frac{d(3\sec 2\theta - 2)}{3\sec 2\theta - 2} =$$

$$= \frac{1}{6}\ln(3\sec 2\theta - 2) + C \quad (w)$$

$$d\left[\frac{1}{6}\ln(3\sec 2\theta - 2) + C\right] = \frac{1}{6}\cdot\frac{6\sec 2\theta \operatorname{tg} 2\theta\, d\theta}{3\sec 2\theta - 2} = \frac{\sec 2\theta \operatorname{tg} 2\theta\, d\theta}{3\sec 2\theta - 2}$$

81) $\int \frac{\sec^2 2t\, dt}{\sqrt{5+3\operatorname{tg} 2t}} =$

Solución :
Sea: $u = 5 + 3\operatorname{tg} 2t \Longrightarrow \frac{du}{6} = \sec^2 2t\, dt$, reemplazando en la inte - gral:

$$\int \frac{du/6}{\sqrt{u}} = \frac{1}{6}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{6}\int u^{-1/2}\,du = \frac{1}{3}u^{1/2} + C =$$

$$= \frac{1}{3}(5 + 3\operatorname{tg} 2t)^{1/2} + C \quad (w)$$

$$d\left[\frac{1}{3}(5+3\operatorname{tg} 2t)^{1/2} + C\right] = \frac{1}{6}\frac{(6\sec^2 2t)}{(5+3\operatorname{tg} 2t)^{1/2}}dt = \frac{\sec^2 2t}{(5+3\operatorname{tg} 2t)^{1/2}}dt$$

APLICACION DE LAS FORMULAS 6 - 7

Grupo: 2 Verificar las siguientes integrales:

1) $\int 6e^{3x}dx = 2e^{3x} + C$

Solución.

Sea: $u = 3x \rightarrow \frac{du}{3} = dx$, reemplazamos en la integral:

$$\int 6e^u \frac{du}{3} = \frac{6}{3}\int e^u du = 2e^u + C = 2e^{3x} + C$$

2) $\int e^{x/n}dx = ne^{x/n} + C$

Solución.

Sea: $u = x/n \Longrightarrow n.du = dx$, reemplazamos en la integral:

$$\int e^u n du = n\int e^u du = ne^u + C = ne^{x/n} + C$$

3) $\int \frac{dx}{e^x} = -\frac{1}{e^x} + C$

Solución.

$$= \int e^{-x}dx = -\int e^{-x}d(-x) = -e^{-x} + C = -\frac{1}{e^x} + C$$

4) $\int 10^x dx = \frac{10^x}{\ln 10} + C$

Solución.

$u = 10^x \rightarrow \frac{du}{\ln 10} = 10^x dx$, reemplazamos en la integral:

$$\int \frac{du}{\ln 10} = \frac{1}{\ln 10}\int du = \frac{1}{\ln 10}\cdot u + C = \frac{10^x}{\ln 10} + C$$

5) $\int a^{ny}\,dy = \dfrac{a^{ny}}{n\ln a} + C$

Solución.

Sea: $v = a^{ny} \rightarrow dv = a^{ny}\,(n)(\ln(a))dy = \dfrac{dv}{n\ln a} = a^{ny}\,dy$

$$\therefore \int a^{ny}\,dy = \int \frac{dv}{n\ln a} = \frac{1}{n\ln a}\int dv = \frac{v}{n\ln a} + C = \frac{a^{ny}}{n\ln a} + C$$

6) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}\,dx}{\sqrt{x}} = 2e^{\sqrt{x}} + C$

Solución.

Haciendo la sustitución: $u = \sqrt{x}$ $\quad 2du = \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$, en la integral:

$$= \int e^u\,(2du) = 2\int e^u\,du = 2e^u + C = 2e^{\sqrt{x}} + C$$

7) $\int (e^{x/a} + e^{-x/a})\,dx = a(e^{x/a} - e^{-x/a}) + C$

Solución.

$$= \int e^{x/a}\,dx + \int e^{-x/a}\,dx = a\int e^{x/a}\,d(x/a) - a\int e^{-x/a}\,d(-x/a) =$$

$$= ae^{x/a} - ae^{-x/a} + C = a(e^{x/a} - e^{-x/a}) + C$$

8) $\int (e^{x/a} + e^{-x/a})^2 dx = \frac{a}{2}(e^{2x/a} - e^{-2x/a}) + 2x + C$

Solución :

$$= \int (e^{2x/a} + 2e^{\circ} + e^{-2x/a})dx = \int e^{2x/a}\,dx + 2\int dx + \int e^{-2x/a}\,dx$$

$$= \frac{a}{2}\int e^{2x/a}\,d(2x/a) + 2\int dx - \frac{a}{2}\int e^{-2x/a}\,d(-2x/a) =$$

$$= \frac{a}{2}e^{2x/a} + 2x - \frac{a}{2}e^{-2x/a} + C$$

Ordenando y factorizando se tiene:

$$= \int (e^{x/a} + e^{-x/a})^2\,dx = \frac{a}{2}(e^{2x/a} - e^{-2x/a}) + 2x + C$$

9) $\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

Solución

Sea: $v = x^2 \rightarrow \dfrac{dv}{2} = xdx$, reemplazamos en la integral:

$$= \int e^v\,\frac{dv}{2} = \frac{1}{2}\int e^v\,dv = \frac{1}{2}e^v + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

10) $\int e^{\operatorname{sen}x}\cos x\,dx = e^{\operatorname{sen}x} + C$

Solución :

Haciendo: $v = \operatorname{sen} x \Longrightarrow dv = \cos x\,dx$, reemplazamos en la integral:

$$= \int e^v\,dv = e^v + C = e^{\operatorname{sen}x} + C$$

12) $\int e^{t/2}\,dt = 2e^{t/2} + C$

Solución.

$$= 2\int e^{t/2}\,d(t/2) = 2e^{t/2} + C$$

13) $\int a^x e^x\,dx = \dfrac{a^x e^x}{1 + \ln a} + C$

Solución :

Sea: $a^x e^x = (ae)^x = u \rightarrow \dfrac{du}{\ln(ae)} = (ae)^x\,dx$

$$= \int \frac{du}{\ln(ae)} = \frac{1}{\ln(ae)}\int du = \frac{u}{\ln(ae)} + C = \frac{(ae)^x}{\ln(ae)} + C$$

Pero: $\ln(ae) = \ln a + \ln e = \ln a + 1 \rightarrow$ reemplazamos

$$= \frac{(ae)^x}{\ln a+1} + C$$

14) $\int a^{2x}\,dx = \dfrac{a^{2x}}{2\ln a} + C$

Solución :

Sea: $v = a^{2x} \rightarrow \dfrac{dv}{2\ln a} = a^{2x}\,dx$, reemplazamos en la integral:

$$= \int \frac{dv}{2\ln a} = \frac{1}{2\ln a}\int dv = \frac{v}{2\ln a} + C = \frac{a^{2x}}{2\ln a} + C$$

15) $\int (e^{5x} + a^{5x})dx$

Solución.

$$= \int e^{5x}\,dx + \int a^{5x}\,dx = \frac{1}{5}\int e^{5x}\,d(5x) + \int a^{5x}\,dx = \frac{1}{5}e^{5x} + \int a^{5x}\,dx$$

$$u = a^{5x} \rightarrow \frac{du}{5\ln a} = a^{5x}\,dx$$

$$\int a^{5x}\,dx = \int \frac{du}{5\ln a} = \frac{1}{5\ln a}\int du = \frac{u}{5\ln a} + C = \frac{a^{5x}}{5\ln a} + C$$

$$\therefore \int (e^{5x} + a^{5x})dx = \frac{1}{5}e^{5x} + \frac{a^{5x}}{5\ln a} + C$$

Determinar el valor de c/u de las siguientes integrales y comprobar sus resultados por diferenciación:

16) $\int 5e^{ax}\,dx =$

$u = ax \rightarrow \frac{du}{a} = dx$, reemplazando en la integral:

$$= \int 5e^{u}\frac{du}{a} = \frac{5}{a}\int e^{u}\,du = \frac{5}{a}e^{u} + C = \frac{5}{a}e^{ax} + C = w$$

$$\therefore\ d(w) = \left[\frac{5}{a}e^{ax}(a)\right]dx = 5e^{ax}\,dx$$

17) $\int \frac{3dx}{e^{x}} = 3\int e^{-x}\,dx = -3\int e^{-x}\,d(-x) = -3e^{-x} + C = -\frac{3}{e^{x}} + C = w$

$$\therefore\ d(w) = \frac{(3)\,e^{x}}{e^{2x}}\,dx = \frac{3dx}{e^{x}}$$

18) $\int \frac{4dt}{\sqrt{e^{t}}} = 4\int e^{-t/2}\,dt = -8\int e^{-t/2}\,d(-t/2) = -8e^{-t/2} + C = w$

$$\therefore\ d(w) = -8\,e^{-t/2}\left(-\frac{1}{2}\right)dt = 4e^{-t/2}\,dt$$

19) $\int c^{ax}\,dx$

Sea: $v = C^{ax} \rightarrow \frac{dv}{a\ln C} = C^{ax}\,dx$, reemplazamos en la integral:

$$= \int \frac{dv}{a\ln C} = \frac{1}{a\ln C}\int dv = \frac{v}{a\ln C} + C = \frac{C^{ax}}{a\ln C} + C = w$$

$$\therefore\ d(w) = \frac{C^{ax}\,(a)\,\ln C}{a\ln c}\,dx = C^{ax}\,dx$$

20) $\int \frac{dx}{4^{2x}} = \int 4^{-2x}\,dx = \frac{4^{-2x}}{2\ln 4}$

Sea: $u = 4^{-2x} \rightarrow -\frac{du}{2\ln 4} = 4^{-2x}\,dx$, reemplazamos en la integral:

$$= \int -\frac{du}{2\ln 4} = -\frac{1}{2\ln 4}\int du = -\frac{u}{2\ln 4} + C = \frac{-4^{-2x}}{2\ln 4} + C = w$$

$$\therefore\ d(w) = \frac{-4^{-2x}(-2)(\ln 4)}{2\ln 4}\,dx = 4^{-2x}\,dx = \frac{dx}{4^{2x}}$$

21) $\int x^{2}e^{x^{3}}\,dx$

Multiplicando y dividiendo por 3 se tiene:

$$= \frac{1}{3}\int 3x^{2}e^{x^{3}}\,dx = \frac{1}{3}e^{x^{3}} + C = w$$

$$\therefore\ d(w) = \frac{3x^{2}e^{x^{3}}}{3}\,dx = x^{2}e^{x^{3}}\,dx$$

22) $\int \left(\frac{e^{x}+4}{e^{x}}\right)dx = \int e^{-x}(e^{x}+4)dx = \int dx + 4\int e^{-x}\,dx =$

$$= x - 4e^{-x} + C = w$$

$$\therefore\ d(w) = (1 - 4e^{-x}(-1))dx = (1 + 4e^{-x})dx = \left(\frac{e^{x}+4}{e^{x}}\right)dx$$

23) $\int \frac{e^{x}\,dx}{e^{x}-2} = \int \frac{d(e^{x}-2)}{e^{x}-2} = \ln(e^{x}-2) + C = w$

$$\therefore \quad d(w) = \frac{e^x}{e^x - 2}\,dx$$

24) $\int x(e^{x^2}+2)dx = \int xe^{x^2}dx + 2\int xdx = \frac{1}{2}\int 2x\,e^{x^2}dx + 2\int xdx$

$$= \frac{1}{2}\int e^{x^2}d(x^2) + 2\int xdx = \frac{e^{x^2}}{2} + x^2 + C = w$$

$$\therefore \quad d(w) = \left(\frac{e^{x^2}(2x)}{2} + 2x\right)dx = (xe^{x^2} + 2x)dx$$

25) $\int \frac{e^{\sqrt{x}} - 3}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx - 3\int\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\int e^{\sqrt{x}}\,d(\sqrt{x}) - 3\int\frac{dx}{\sqrt{x}} =$

$$= 2e^{x} - 6x^{1/2} + C = w$$

$$\therefore \quad d(w) = (2e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} - 3x^{-1/2})dx = \left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$$

26) $\int t\,2^{t^2}dt =$

Sea: $v = 2^{t^2} \longrightarrow \frac{dv}{2\ln 2} = t\,2t^2$, reemplazamos en la integral:

$$= \int\frac{dv}{2\ln 2} = \frac{1}{2\ln 2}\int dv = \frac{v}{2\ln 2} + C = \frac{2^{t^2}}{2\ln 2} + C = w$$

$$\therefore \quad d(w) = \frac{2^{t^2}(2t)\ln 2}{2\ln 2}dt = t2^{t^2}dt$$

27) $\int\frac{a\,d\theta}{b^{3\theta}} = a\int b^{-3\theta}d\theta = -\frac{ab^{-3\theta}}{3\ln b} + C = w$

$$d(w) = -\frac{ab^{-3\theta}(-3)(\ln b)}{3\ln b}d\theta = ab^{-3\theta}d\theta$$

28) $\int 6xe^{-x^2}dx = -3\int -2x\,e^{-x^2}dx = -3\int e^{-x^2}d(-x^2) = -3e^{-x^2} + C = w$

$$\therefore \quad d(w) = -3e^{-x^2}(-2x)dx = 6xe^{-x^2}dx$$

29) $\int (e^{2x})^2dx = \int e^{4x}dx = \frac{1}{4}\int e^{4x}4dx = \frac{1}{4}\int e^{4x}d(4x) =$

$$= \frac{e^{4x}}{4} + C = w$$

$$d(w) = \frac{e^{4x}(4)\,dx}{4} = e^{4x}dx = (e^{2x})^2dx$$

30) $\int\frac{x^2dx}{e^{x^3}} = \int e^{-x^3}x^2dx = -\frac{1}{3}\int e^{-x^3}d(-x^3) = -\frac{e^{-x^3}}{3} + C = w$

$$d(w) = -\frac{e^{-x^3}(-3x^2)}{3}dx = x^2e^{-x^3}dx$$

<u>Aplicación de las fórmulas del</u> 8 - 17

<u>Grupo 3:</u>

1) $\int\cos mx\,dx = \frac{1}{m}\int\cos mx\,d(mx) = \frac{1}{m}\,\text{sen}\,mx + C$

2) $\int tg\,bx\,dx = \int\frac{\text{sen}\,bx}{\cos bx}dx$

$u = \cos bx \Longrightarrow -\frac{du}{b} = \text{sen}bx\,dx$, reemplazamos en la integral :

$$\int\frac{-du/b}{u} = -\frac{1}{b}\int\frac{du}{u} = -\frac{1}{b}\ln u + C = -\frac{1}{b}\ln\cos bx + C =$$

$$= -\frac{1}{b}(\ln 1 - \ln\cos bx) + C = \frac{\ln\sec bx}{b} + C$$

3) $\int\sec ax\,dx =$

<u>Solución</u>.

Multiplicando y dividiendo por: csc ax + tg ax, se tiene:

$= \int\sec ax\cdot\left(\frac{\sec ax + tg\,ax}{\sec ax + tg\,ax}\right)dx$, efectuando el producto:

$$\int\frac{\sec^2 ax + \sec ax\,tg\,ax}{\sec ax + tg\,ax}dx = \frac{1}{a}\int\frac{d(\sec ax + tg\,ax)}{\sec ax + tg\,ax} =$$

$$= \frac{1}{a}\ln(\sec ax + tg\,ax) + C$$

4) $\int\csc v\,dv =$

Solución.

Multiplicando y dividiendo por: $(\csc v - \operatorname{ctg} v)$ se tiene:

$$= \int \frac{\csc^2 v - \csc v \operatorname{ctg} v}{\csc v - \operatorname{ctg} v}\, dv = \int \frac{d(\csc v - \operatorname{ctg} v)}{\csc v - \operatorname{ctg} v} = \ln(\csc v - \operatorname{ctg} v) + C$$

5) $\int \sec 3t \cdot \operatorname{tg} 3t\, dt = \frac{1}{3}\int d(\sec 3t) = \frac{1}{3}\sec 3t + C$

De otra manera:

$$\int \sec 3t \operatorname{tg} 3t\, dt = \int \frac{\operatorname{sen} 3t}{\cos^2 3t}\, dt = \int \cos^{-2}(3t)\operatorname{sen} 3t\, dt$$

Haciendo $u = \cos 3t \quad -\frac{du}{3} = \operatorname{sen} 3t\, dt$, se tiene en la integral:

$$\int u^{-2}\left(-\frac{du}{3}\right) = -\frac{1}{3}\int u^{-2}\, du = -\frac{1}{3}\frac{u^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{3}(\cos^{-1} 3t) + C$$

$$= \frac{1}{3\cos 3t} + C = \frac{\sec 3t}{3} + C$$

6) $\int \csc ay \operatorname{ctg} ay\, dy = -\frac{1}{a}\int d(\csc ay) = -\frac{1}{a}\csc ay + C$

7) $\int \csc^2 3x\, dx =$

Haciendo la siguiente sustitución:

$u = 3x, \ \frac{du}{3} = dx$, reemplazamos en la integral se tiene:

$$\int \csc^2 u\, \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int \csc^2 u\, du = -\frac{\operatorname{ctg} u}{3} + C = -\frac{1}{3}\operatorname{ctg} 3x + C$$

8) $\int \operatorname{ctg} x/2\, dx = \int \frac{\cos x/2}{\operatorname{sen} x/2}\, dx$

Haciendo la siguiente sustitución:

$u = \operatorname{sen} x/2, \ 2du = \cos x/2\, dx$, reemplazamos en la integral se tiene:

$$\int \frac{2du}{u} = 2\int \frac{du}{u} = 2\ln u + C = 2\ln \operatorname{sen} x/2 + C$$

9) $\int x^2 \sec^2 x^3 dx =$

$u = x^3 \Longrightarrow \frac{du}{3} = x^2 dx$, reemplazamos en la integral:

$$\int \sec^2 u\, \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int \sec^2 u\, du = \frac{1}{3}\operatorname{tg} u + C = \frac{1}{3}\operatorname{tg} x^3 + C$$

10) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = \int \csc^2 x\, dx = -\operatorname{ctg} x + C$

11) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + C$

12) $\int (\operatorname{tg}\theta + \operatorname{ctg}\theta)^2\, d\theta$

Efectuando operaciones se tiene:

$$\int (\operatorname{tg}^2\theta + 2\operatorname{tg}\theta\operatorname{ctg}\theta + \operatorname{ctg}^2\theta)d\theta = \int (\operatorname{tg}^2\theta + 2 + \operatorname{ctg}^2\theta)d\theta \quad \text{por ser: } \operatorname{ctg}\theta = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta}$$

$$= \int [(\operatorname{tg}^2\theta + 1) + (\operatorname{ctg}^2\theta + 1)]d\theta = \int (\operatorname{tg}^2\theta + 1)d\theta + \int (\operatorname{ctg}^2\theta + 1)d\theta =$$

$$\int \sec^2\theta d\theta + \int \csc^2\theta d\theta = \operatorname{tg}\theta - \operatorname{ctg}\theta + C$$

13) $\int (\sec\phi - \operatorname{tg}\phi)^2 = \int (\sec^2\phi - 2\sec\phi\operatorname{tg}\phi + \operatorname{tg}^2\phi)d\phi$

Ordenando se tiene:

$$\int (\sec^2\phi + \operatorname{tg}^2\phi)d\phi - 2\int \sec\phi\operatorname{tg}\phi\, d\phi = \int (\sec^2\phi + \sec^2\phi - 1)\, d\phi + 2\int \frac{\operatorname{sen}\phi}{\cos^2\phi}\, d\phi$$

$$= 2\int \sec^2\phi\, d\phi - \int d\phi + 2\int \frac{\operatorname{sen}\phi}{\cos^2\phi}d\phi = 2\int \sec^2\phi d\phi - \int d\phi + 2\int \cos^{-2}\phi\, d(\cos\phi)$$

$$= 2\operatorname{tg}\phi - \phi - 2\cos^{-1}\phi + C = 2\operatorname{tg}\phi - 2\sec\phi - \phi + C$$

14) $\int \frac{dx}{1 + \cos x} = \int \frac{1 - \cos x}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}\, dx = \int \frac{1 - \cos x}{1 - \cos^2 x}\, dx =$

$$\int \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx$$

$$= \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx - \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx = \int \csc^2 x\, dx - \int \operatorname{sen}^{-2} x\, d(\operatorname{sen} x) =$$

$$= -\operatorname{ctg} x - \frac{\operatorname{sen}^{-1} x}{-1} + C$$

$$= -\operatorname{ctg} x + \frac{1}{\operatorname{sen} x} + C = -\operatorname{ctg} x + \csc x + C$$

15) $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x} = \operatorname{tg} x - \sec x + C$

Multiplicando y dividiendo por $(1 - \operatorname{sen} x)$ se tiene :

$$\int \frac{1 - \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen}^2 x}\, dx = \int \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \cos^{-2} x \operatorname{sen} x =$$

$$= \int \sec^2 x\, dx + \int \cos^{-2} d(\cos x)$$

$$= \operatorname{tg} x + \frac{\cos^{-1} x}{-1} + C = \operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x} + C = \operatorname{tg} x - \sec x + C$$

16) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} s\, ds}{1 + \cos s} = -\ln(1 + \cos(s)) + C$

Haciendo $u = 1 + \cos s \rightarrow -du = \operatorname{sen} s\, ds$, reemplazamos en la integral:

$$\int -\frac{du}{u} = -\int \frac{du}{u} = -\ln(u) + C = -\ln(1 + \cos s) + C$$

17) $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x\, dx}{1 + \operatorname{tg} x} =$

Haciendo $v = 1 + \operatorname{tg} x$, $dv = \sec^2 x\, dx$, reemplazamos en la integral:

$$\int \frac{dv}{v} = \ln(v) + C = \ln(1 + \operatorname{tg} x) + C$$

18) $\displaystyle\int x \cos x^2 dx$

Haciendo: $v = x^2 \rightarrow \frac{dv}{2} = x dx$, reemplazamos en la integral:

$$\int \cos v \frac{dv}{2} = \frac{1}{2} \int \cos v\, dv = \frac{1}{2} \operatorname{sen} v + C = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x^2 + C$$

19) $\displaystyle\int (x + \operatorname{sen} 2x) dx = \int x dx + \int \operatorname{sen} 2x\, dx = \int x dx + \frac{1}{2} \int \operatorname{sen} 2x\, d(2x)$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x + C = \frac{1}{2}(x^2 - \cos 2x) + C$$

20) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{\sqrt{4 - \cos x}} = \int (4 - \cos x)^{-1/2} \operatorname{sen} x\, dx =$

Haciendo $u = 4 - \cos x \rightarrow du = \operatorname{sen} x\, dx$, reemplazamos en la integral:

$$\int u^{-1/2} du = \frac{u^{1/2}}{1/2} + C = 2u^{1/2} + C = 2(4 - \cos x)^{1/2} + C$$

21) $\displaystyle\int \frac{1 + \cos x}{x + \operatorname{sen} x}\, dx = \int \frac{d(x + \operatorname{sen} x)}{x + \operatorname{sen} x} = \ln(x + \operatorname{sen} x) + C$

22) $\displaystyle\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{1 + 2\operatorname{tg}\theta}} = \int (1 + 2\operatorname{tg}\theta)^{-1/2} \sec^2\theta\, d\theta$

Hacemos: $u = 1 + 2\operatorname{tg}\theta \rightarrow \frac{du}{2} = \sec^2\theta\, d\theta$, reemplazamos en la integral

$$\int u^{-1/2} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int u^{-1/2} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{1/2}}{1/2} = u^{1/2} + C = (1 + 2\operatorname{tg}\theta)^{1/2} + C$$

Calcular c/u de las sgtes. integrales y comprobar los resultados por diferenciación:

23) $\displaystyle\int \operatorname{sen} \frac{2x}{3}\, dx =$

Haciendo $u = \frac{2x}{2} \rightarrow \frac{3}{2} du = dx$, reemplazamos en la integral:

$$\int \operatorname{sen} u \left(\frac{3}{2} du\right) = \frac{3}{2} \int \operatorname{sen} u\, du = -\frac{3}{2} \cos u + C = -\frac{3}{2} \cos \frac{2x}{3} + C = w$$

$$\therefore\ d(w) = -\frac{3}{2}\left(-\operatorname{sen} \frac{2x}{3} \cdot \frac{2}{3}\right) = \operatorname{sen} \frac{2x}{3}\, dx$$

24) $\displaystyle\int \cos(b + ax) dx$

Haciendo el sgte. cambio de variable:

$u = b + ax \Longrightarrow \frac{du}{a} = dx$, en la integral se tiene:

$$\int \cos(u)\ \frac{du}{a} = \frac{1}{a}\int \cos u\ du = \frac{1}{a}\ \text{sen}\ u + C = \frac{1}{a}\ \text{sen}(b + ax) + C = w$$

$$\therefore\ d(w) = \frac{1}{a}\ (\cos(b + ax)\ .\ a)\ dx = \cos\ (b + ax)dx$$

25) $\int \csc^2\ (a - bx)\ dx =$

Haciendo: $u = (a - bx) \rightarrow -\frac{du}{b} = dx$, reemplazamos en la integral

$$\int \csc^2\ (u)\ (-\frac{du}{b}) = -\frac{1}{b}\int \csc^2 u du = -\frac{1}{b}\ (-\text{ctg}\ u) + C = \frac{1}{b}\ \text{ctg}(a - bx) + C = w$$

C (w)

$$\therefore\ d(w) = \frac{1}{b}\ \csc^2\ (a - bx).b\ dx = \csc^2\ (a - bx)dx$$

26) $\int \sec\ \frac{\theta}{2}\ \text{tg}\ \frac{\theta}{2}\ d\theta = 2\int d(\sec \frac{\theta}{2}) = 2\ \sec\ \frac{\theta}{2} + C = w$

$$\therefore\ d(w) = 2\ \sec \frac{\theta}{2}\ .\ \text{tg}\ \frac{\theta}{2}\ .\ \frac{1}{2}\ d\theta = \sec\ \frac{\theta}{2}\ \ \text{tg}\ \frac{\theta}{2}\ d\theta$$

27) $\int \csc\ \frac{a\phi}{b}\ \text{ctg}\ \frac{a\phi}{b}\ d\phi = \frac{b}{a}\int d(\csc\ \frac{a\phi}{b}) = \frac{b}{a}\ \csc\ \frac{a\phi}{b} + C = w$

$$\therefore\ d(w) = \frac{b}{a}\ \csc\ \frac{a\phi}{b}\ \text{ctg}\ \frac{a\phi}{b}\ .\ \frac{a}{b}\ d\phi = \csc\ \frac{a\phi}{b}\ \ \text{ctg}\ \ \frac{a\phi}{b}\ d\phi$$

28) $\int \text{ctg}(e^x)e^x dx = \int \frac{\cos\ e^x}{\text{sen}\ e^x}.\ e^x dx =$

Haciendo la siguiente sustitución:

$u = \text{sen}\ e^x \rightarrow du = \cos\ e^x\ .\ e^x\ dx$, en la integral se tiene:

$$\int \frac{du}{u} = \ln(u) + C = \ln(\text{sen}\ e^x) + C = w$$

$$\therefore\ d(w) = \frac{\cos\ e^x\ .\ e^x}{\text{sen}\ e^x}\ dx$$

29) $\int \frac{d\theta}{\text{sen}^2 4\theta} = \int \csc^2 4\theta\ d\theta = \frac{1}{4}\int \csc^2(4\theta)d(4\theta) = \frac{1}{4}\ (-\text{ctg}\ 4\theta) + C$

$$= -\frac{1}{4}\ \text{ctg}\ 4\theta + C = w$$

$$\therefore\ d(w) = -\frac{1}{4}\ (-\csc^2 4\theta\ )4d\theta = \csc^2 4\theta d\theta$$

30) $\int \frac{dt}{\text{sen}^2 3t} = \int \csc^2 3t = \frac{1}{3}\int \csc^2 3t\ d(3t) = \frac{1}{3}\ (-\text{ctg}\ 3t) + C =$

$$= -\frac{1}{3}\ \text{ctg}\ 3t + C = w$$

$$d(w) = -\frac{1}{3}\ (-\csc^2 3t)\ 3\ dt = \csc^2 3t\ dt$$

31) $\int \frac{d\theta}{\cos\ 4\theta} = \int \sec\ 4\theta\ d\theta =$

Multiplicando y dividiendo por: $(\sec\ 4\theta\ + \text{tg}\ 4\theta\ )$ se tiene:

$$\int \frac{\sec^2 4\theta\ + \text{tg}4\theta\ .\sec 4\theta}{\sec 4\theta\ + \text{tg}4\theta} = \frac{1}{4}\int \frac{d(\sec\ 4\theta\ + \text{tg}\ 4\theta)}{\sec\ 4\theta\ + \text{tg}\ 4\theta} =$$

$$= \frac{1}{4}\ \ln(\sec\ 4\theta\ + \text{tg}4\theta) + C = w$$

$$\therefore\ d(w) = \frac{1}{4}\ .\ \frac{\sec\ 4\theta\ \text{tg}\ 4\theta\ + \sec^2 4\theta}{\sec\ 4\theta\ + \text{tg}\ 4\theta}\ (4)d\theta = \sec\ 4\theta\ \frac{(\sec\ 4\theta\ + \text{tg}\ 4\theta)}{\sec\ 4\theta\ + \text{tg}\ 4\theta}d\theta$$

32) $\int \frac{adx}{\cos^2 bx} = a\int \sec^2 bx\ dx = \frac{a}{b}\int \sec^2 bx\ d(bx) = \frac{a}{b}\ \text{tg}\ bx + C = w$

$$\therefore\ d(w) = \frac{a}{b}\ \sec^2 bx\ .\ b\ dx = a\ \sec^2 bx\ dx$$

33) $\int \frac{\text{sen}\ 2x}{3 + \cos\ 2x}\ dx =$

Haciendo la sustitución: $v = 3 + \cos\ 2x \rightarrow dv = (-\ \text{sen}\ 2x\ dx)2$

$-\frac{dv}{2} = \text{sen}\ 2x\ dx$, en la integral se tiene :

$$\int -\frac{dv/2}{v} = -\frac{1}{2}\int \frac{dv}{v} = -\frac{1}{2}\ \ln(v) + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\ \ln(3 + \cos\ 2x) + C = w$$

$$\therefore \; d(w) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(-\text{sen } 2x \cdot 2)}{3 + \cos 2x} dx = \frac{\text{sen } 2x}{3 + \cos 2x} dx$$

34) $$\int \frac{\cos t \; dt}{\sqrt{a + b \text{ sen } t}} = \int (a + b \text{ sen } t)^{-1/2} \cos t \; dt$$

Haciendo la siguiente sustitución:

$u = a + b \text{ sen } t \rightarrow du = b \cos t \; dt \rightarrow \frac{du}{b} = \cos t \; dt$, en la integral se tiene:

$$= \int u^{-1/2} \frac{du}{b} = \frac{1}{b} \int u^{-1/2} du = \frac{1}{b} \frac{u^{1/2}}{1/2} + C = \frac{2}{b} (a + b \text{ sen } t)^{1/2} + C = w$$

$$\therefore \; d(w) = \frac{2}{b} \cdot \frac{1}{2} (a + b\text{sen } t)^{-1/2} \cdot b \cos t \; dt = \frac{\cos t \; dt}{(a + b \text{ sen } t)^{1/2}}$$

35) $$\int \frac{\csc\theta \; \text{ctg}\theta \; d\theta}{5 - 4 \csc \theta}$$

Haciendo la siguiente sustitución:

$v = 5 - 4 \csc \theta \rightarrow -\frac{dv}{4} = \csc \theta \, \text{ctg} \, \theta \, d\theta$, en la integral se tiene:

$$\int \frac{dv/4}{v} = \frac{1}{4} \int \frac{dv}{v} = \frac{1}{4} \ln(v) + C = \frac{1}{4} \ln(5 - 4 \csc\theta) + C = w$$

$$\therefore \; d(w) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4\csc\theta \; \text{ctg}\theta}{5 - 4\csc\theta} d\theta = \frac{\csc\theta \; \text{ctg} \; \theta}{5 - 4 \csc \theta} d\theta$$

36) $$\int \frac{\csc^2 x \; dx}{\sqrt{3 - \text{ctg } x}} = \int (3 - \text{ctg } x)^{-1/2} \csc^2 x \; dx$$

Haciendo la siguiente sustitución:

$u = 3 - \text{ctg } x \rightarrow du = \csc^2 x \; dx$, en la integral se tiene:

$$\int u^{-1/2} du = 2u^{1/2} + C = 2(3 - \text{ctg } x)^{1/2} dx = w$$

$$\therefore \; d(w) = 2 \cdot \frac{1}{2} (3 - \text{ctg } x)^{-1/2} \csc^2 x \; dx = \frac{\csc^2 x}{(3 - \text{ctg } x)^{1/2}} dx$$

VERIFICACION DE LAS FORMULAS 18-21

Problemas Grupo-4

VERIFICAR LAS SIGUIENTES INTEGRACIONES.

1.- $$\int \frac{dx}{x^2 + 9} = \frac{1}{3} \text{arctag}(\frac{x}{3}) + C$$

Solución.

$$\int \frac{dx}{x^2 + (3)^2} = \frac{1}{2} \text{ arctag } \frac{x}{3} + C$$

2.- $$\int \frac{dx}{x^2 - 4} = \int \frac{dx}{x^2 - (2)^2} = \frac{1}{4} \ln(\frac{x - 2}{x + 2}) + C$$

3.- $$\int \frac{dy}{\sqrt{25 - y^2}} = \int \frac{dy}{\sqrt{5^2 - y^2}} = \text{arcsen } \frac{y}{5} + C$$

4.- $$\int \frac{dx}{9x^2 - 4} = \int \frac{dx}{(3x)^2 - 2^2} =$$

Haciendo $u = 3x \rightarrow \frac{du}{3} = dx$, reemplazamos en la integral.

$$\int \frac{du/3}{u^2 - 2^2} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u^2 - 2^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \ln(\frac{u - 2}{u + 2}) + C$$

$$= \frac{1}{12} \ln(\frac{3x - 2}{3x + 2}) + C$$

5.- $$\int \frac{dx}{\sqrt{16 - 9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4^2 - (3x)^2}} =$$

Haciendo el siguiente cambio de variable:

$v = 3x \rightarrow \frac{du}{3} = dx$, en la integral se tiene:

$$= \int \frac{du/3}{\sqrt{4^2 - u^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{\sqrt{4^2 - u^2}} = \frac{1}{3} \text{ arcsen } \frac{u}{4} + C =$$

$$= \frac{1}{3}\ \text{arcsen}\ \frac{3x}{4} + C$$

6.- $\displaystyle\int \frac{dx}{9x^2 - 1} = \int \frac{dx}{(3x)^2 - 1}$

Haciendo $u = 3x \rightarrow \frac{du}{3} = dx$, reemplazamos en la integral

$$= \int \frac{du/3}{u^2-1} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{3x-1}{3x+1}\right| + C$$

7.- $\displaystyle\int \frac{dt}{4 - 9t^2} = \int \frac{dt}{2^2 - (3t)^2}$

Haciendo: $3t = u \rightarrow \frac{du}{3} = dt$, reemplazamos en la integral

$$\int \frac{du/3}{2^2 - u^2} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{2^2 - u^2} = \frac{1}{12}\ln\left|\frac{2+u}{2-u}\right| + C$$

$$= \frac{1}{12}\ln\left|\frac{2+3t}{2-3t}\right| + C$$

8.- $\displaystyle\int \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}} = \int \frac{e^x dx}{1 + (e^x)^2}$

Haciendo la siguiente sustitución.

$u = e^x \rightarrow du = e^x dx$, en la integral se tiene:

$$\int \frac{du}{1 + u^2} = \text{arctag}\ u + C = \text{arctag}\ e^x + C$$

9.- $\displaystyle\int \frac{\cos\theta\ d\theta}{4 - \text{sen}^2\theta} = \int \frac{\cos\theta\ d\theta}{2^2 - (\text{sen}\theta)^2}$

Haciendo la siguiente sustitución.

$u = \text{sen}\theta \rightarrow du = \cos\theta\ d\theta$, en la integral se tiene:

$$= \int \frac{du}{2^2 - u^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+u}{2-u}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\text{sen}\theta}{2-\text{sen}\theta}\right| + C$$

10. $\displaystyle\int \frac{bdx}{a^2x^2 - c^2} = b\int \frac{dx}{(ax)^2 - c^2}$

Haciendo la siguiente sustitución.

$u = ax \rightarrow \frac{du}{a} = dx$, en la integral se tiene :

$$= b\int \frac{du/a}{u^2 - c^2} = \frac{b}{a}\int \frac{du}{u^2 - c^2} = \frac{b}{a}\cdot\frac{1}{2c}\ln\left|\frac{u-c}{u+c}\right| + C$$

$$= \frac{b}{2ac}\ln\left|\frac{ax-c}{ax+c}\right| + C$$

11. $\displaystyle\int \frac{5xdx}{\sqrt{1 - x^4}} = 5\int \frac{xdx}{\sqrt{1 - (x^2)^2}}$

Haciendo la siguiente sustitución:

$v = x^2 \rightarrow \frac{dv}{2} = xdx$, en la integral se tiene:

$$= 5\int \frac{dv/2}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{5}{2}\int \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{5}{2}\ \text{arcsen}\ v + C = \frac{5}{2}\ \text{arcsen}\ x^2 + C$$

12. $\displaystyle\int \frac{axdx}{x^4 + b^4} = a\int \frac{xdx}{(x^2)^2 + (b^2)^2} =$

Haciendo la siguiente sustitución.

$u = x^2 \rightarrow \frac{du}{2} = xdx$, en la integral se tiene:

$$a\int \frac{du/2}{u^2 + (b^2)^2} = \frac{a}{2}\int \frac{du}{u^2 + (b^2)^2} = \frac{a}{2b^2}\cdot\text{arctag}\ \frac{u}{b^2} + C$$

$$= \frac{a}{2b^2} \text{ arctag } \frac{x^2}{b^2} + C$$

13. $$\int \frac{dt}{(t-2)^2 + 9} = \int \frac{dt}{(t-2)^2 + 3^2} =$$

Haciendo la siguiente sustitución.

$v = t - 2 \rightarrow dv = dt$; en la integral se tiene:

$$= \int \frac{dv}{v^2 + 3^2} = \frac{1}{3} \text{ arctag } \frac{v}{3} + C = \frac{1}{3} \text{ arctag } \frac{t-2}{3} + C$$

14. $$\int \frac{dy}{\sqrt{1 + a^2y^2}} = \int \frac{dy}{\sqrt{1 + (ay)^2}}$$

Haciendo: $u = ay \rightarrow \frac{du}{a} = dy$, reemplazamos en la integral

$$= \int \frac{du/a}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{1}{a} \ln|u + \sqrt{1 + u^2}| + C$$

$$= \frac{1}{a} \ln|ay + \sqrt{1 + (ay)^2}| + C$$

15. $$\int \frac{dv}{\sqrt{4-(v+3)^2}} = \int \frac{dv}{\sqrt{2^2 - (v+3)^2}}$$

Haciendo la siguiente sustitución: $v + 3 = u \rightarrow du = dx$, se tiene en la integral.

$$= \int \frac{du}{\sqrt{2^2 - u^2}} = \text{arcsen } \frac{u}{2} + c = \text{arcsen } \frac{v+3}{2} + C$$

Determinar el valor de c/u de las siguientes integrales y comprobar los resultados por diferenciación.

16. $$\int \frac{dx}{9 - 16x^2} = \int \frac{dx}{3^2 - (4x)^2}$$

Sea: $u = 4x \rightarrow \frac{du}{4} = dx$, reemplazamos en la integral.

$$= \int \frac{du/4}{3^2 - u^2} = \frac{1}{4} \int \frac{du}{3^2 - u^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \ln\left|\frac{3+u}{3-u}\right| + C$$

$$= \frac{1}{24} \ln\left|\frac{3+4x}{3-4x}\right| + C = w$$

Comprobación.

$$d(w) = \frac{1}{24} \cdot \frac{\dfrac{4(3-4x)-(3+4x)(-4)}{(3-4x)^2}}{\dfrac{3+4x}{3-4x}} dx$$

$$= \frac{1}{24} \cdot \frac{24(3-4x)}{(3-4x)^2(3+4x)} dx = \frac{dx}{9 - 16x^2}$$

17. $$\int \frac{dy}{\sqrt{9y^2 + 4}} = \int \frac{dy}{\sqrt{(3y)^2 + 4}} =$$

Haciendo la siguiente sustitución.

$u = 3y \rightarrow \frac{du}{3} = dy$, en la integral se tiene:

$$= \int \frac{du/3}{\sqrt{u^2 + 2^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 2^2}} = \frac{1}{3} \ln|u + \sqrt{u^2 + 4}| + C$$

$$= \frac{1}{3} \ln|3y + \sqrt{9y^2 + 4}| + C = w$$

Comprobación.

$$d(w) = \frac{1}{3}\left[\frac{3 + \dfrac{18y}{2\sqrt{9y^2 + 2^2}}}{3y + \sqrt{9y^2 + 2^2}}\right] dy = \frac{1}{3}\left[\frac{\dfrac{3(\sqrt{9y^2+4}+3y)}{\sqrt{9y^2 + 4}}}{3y + \sqrt{9y^2+4}}\right] dy = \frac{dy}{\sqrt{9y^2 + -}}$$

18. $$\int \frac{dt}{4t^2 + 25} = \int \frac{dt}{(2t)^2 + 5^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2t)}{(2t)^2 + 5^2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \text{ arctag } \frac{2t}{5} + C$$

Comprobación: como ejercicio.

19. $\int \frac{7dx}{3 + 7x^2} = 7 \int \frac{dx}{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{7}x)^2} =$

Haciendo $u = \sqrt{7}x \rightarrow \frac{du}{\sqrt{7}} = dx$, reemplazamos en la integral

$$= 7 \int \frac{du/\sqrt{7}}{(\sqrt{3})^2 + u^2} = \frac{7}{\sqrt{7}} \int \frac{du}{(\sqrt{3})^2 + u^2} = \frac{7}{\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctag} \frac{u}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \sqrt{7/3} \operatorname{arctag} \frac{\sqrt{7}x}{\sqrt{3}} + C$$

Comprobación como ejercicio.

20. $\int \frac{3dy}{9y^2 - 16} = 3 \int \frac{dy}{(3y)^2 - 16} =$

Haciendo $v = 3y \rightarrow \frac{dv}{3} = dy$, reemplazamos en la integral.

$$3 \int \frac{dv/3}{v^2 - 4^2} = \frac{3}{3} \cdot \int \frac{dv}{v^2 - 4^2} = \int \frac{dv}{v^2 - 4^2} = \frac{1}{8} \ln \left|\frac{v - 4}{v + 4}\right| + C$$

$$= \frac{1}{8} \ln \left|\frac{3y - 4}{3y + 4}\right| + C$$

Verificación como ejercicio.

21. $\int \frac{xdx}{\sqrt{5x^2 + 3}} = \int (5x^2 + 3)^{-1/2} xdx =$

$$= \frac{1}{10} \int (5x^2+3)^{-1/2} d(5x^2+3) = \frac{1}{10} \frac{(5x^2 + 3)^{1/2}}{1/2} + C$$

$$= \frac{1}{5} (5x^2 + 3)^{1/2} + C$$

Verificación como ejercicio.

22. $\int \frac{2e^x dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}} = 2 \int \frac{e^x dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}} = 2 \int \frac{e^x dx}{\sqrt{1 - (e^x)^2}}$

Sea $v = e^x \rightarrow dv = e^x dx$, reemplazamos en la integral.

$$2 \int \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} = 2 \operatorname{arcsen} v + C = 2 \operatorname{arcsen} e^x + C$$

Verificación como ejercicio.

23. $\int \frac{\operatorname{sen}\theta \, d\theta}{\sqrt{4 + \cos^2\theta}} = \int \frac{\operatorname{sen}\theta \, d\theta}{\sqrt{2^2 + (\cos\theta)^2}} =$

Sea: $u = \cos\theta \rightarrow - du = \operatorname{sen}\theta \, d\theta$, reemplazamos en la integral

$$\int - \frac{du}{\sqrt{2^2 + u^2}} = - \int \frac{du}{\sqrt{2^2 + u^2}} = - \ln|u + \sqrt{2^2 + u^2}| + C$$

$$= - \ln|\cos\theta + \sqrt{4 + \cos^2\theta}| + C$$

Verificación como ejercicio.

24. $\int \frac{7x^2 dx}{5 - x^6} = 7 \int \frac{x^2 dx}{(\sqrt{5})^2 - (x^3)^2}$

Sea: $v = x^3 \rightarrow dv = 3x^2 dx \rightarrow \frac{dv}{3} = x^2 dx$, reemplazamos en la

integral.

$$= 7 \int \frac{dv/3}{(\sqrt{5})^2 - v^2} = \frac{7}{3} \int \frac{dv}{(\sqrt{5})^2 - v^2}$$

$$= \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left|\frac{\sqrt{5} - v}{\sqrt{5} + v}\right| + C = \frac{7}{6\sqrt{5}} \ln \left|\frac{\sqrt{5} - x^3}{\sqrt{5} + x^3}\right| + C$$

Verificar las Siguientes Integrales.

1.- $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 3} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x+3} \right| + C$

Solución.

Completando cuadrados en el trinomio de 2do grado se tiene

$$= \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 3} = \int \frac{dx}{(x^2 + 4x + 4) + 3 - 4} = \int \frac{dx}{(x+2)^2 - 1}$$

Haciendo la siguiente sustitución $u = x + 2 \rightarrow du = dx$ y reemplazando en la integral se tiene:

$$= \int \frac{dx}{u^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x+3} \right| + C$$

2.- $\int \frac{dx}{2x - x^2 - 10} = -\frac{1}{3} \text{arctag}\, \frac{x-1}{3} + C$

Solución :

Ordenando y completando cuadrado se tiene:

$$- \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 10} = - \int \frac{dx}{(x^2 - 2x + 1) + 10 - 1}$$

$$= - \frac{dx}{(x-1)^2 + 9}$$

Sea : $u = x - 1 \rightarrow du = dx$, reemplazamos en la integral

$$- \int \frac{du}{u^2 + 3^2} = \frac{1}{3} \text{arctag}\, \frac{u}{3} + C = -\frac{1}{3} \text{arctg}\, \frac{x-1}{3} + C$$

3.- $\int \frac{3dx}{x^2 - 8x + 25} = \text{arctag}\, \frac{x-4}{3} + C$

Solución.

Completando cuadrados en el trinomio de 2do grado se tiene:

$$= 3 \int \frac{dx}{(x^2 - 8x + 16) + 25 - 16} = 3 \int \frac{d(x-4)}{(x-4)^2 + 9}$$

$$= \frac{3}{3} \text{arctag}\, \frac{x-4}{3} + C = \text{arctg}\, \frac{x-4}{3} + C$$

4.- $\int \frac{dx}{3x - x^2 - 2} = \text{arcsen}\,(2x - 3) + C$

Solución.

Ordenando y completando cuadrados en el trinomio de 2do grado se tiene:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{(2x-3)^2}{4}}} = 2 \frac{dx}{\sqrt{1 - (2x-3)^2}}$$

Sea: $v = 2x - 3 \rightarrow \frac{dv}{2} = dx$, reemplazamos en la integral.

$$= 2 \int \frac{dv/2}{\sqrt{1 - v^2}} = \int \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} = \text{arcsen}\, v + C = \text{arcsen}\,(2x - 3) + C$$

5.- $\int \frac{dv}{v^2 - 6v + 5} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{v-5}{v-1} \right| + C$

Solución.

Completando cuadrados se tiene:

$$= \int \frac{dv}{(v^2 - 6v + 9) + 5 - 9} = \frac{dv}{(v-3)^2 - 4}$$

Haciendo la siguiente sustitución.

$x = v - 3 \rightarrow dx = dv$, en la integral se tiene:

$$= \int \frac{dx}{x^2 - 4} = \int \frac{dx}{x^2 - 2^2} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{v-5}{v-1} \right| + C$$

6.- $\int \frac{dx}{2x^2 - 2x + 1} = \int \frac{dx}{2\left[(x^2 - x + \frac{1}{4}) + \frac{1}{4}\right]} = \int \frac{dx}{\frac{1}{2}((2x-1)^2 + 1)}$

$$= 2\int \frac{dx}{(2x-1)^2+1}$$

Sea: $u = 2x - 1 \rightarrow \frac{du}{2} = dx$, en la integral se tiene:

$$= 2\int \frac{du/2}{u^2+1} = \int \frac{du}{u^2+1} = \text{arctag } u + C = \text{arctag}(2x-1)+C$$

7.- $\int \frac{dx}{\sqrt{15+2x-x^2}} = \text{arcsen } \frac{x-1}{4} + C$

Ordenando y completando cuadrados se tiene:

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{16-(x^2-2x+1)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{16-(x-1)^2}}$$

Sea: $v = x - 1 \rightarrow dv = dx$ ∴

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{4^2-v^2}} = \text{arcsen } \frac{v}{4} + C = \text{arcsen } \frac{(x-1)}{4} + C$$

8.- $\int \frac{dx}{x^2+2x} = \frac{1}{2} \ln \frac{x}{x+2} + C$

Completando cuadrado se tiene:

$$= \int \frac{dx}{(x^2+2x+1)-1} = \int \frac{dx}{(x+1)^2-1}$$

efectuando la sustitución $u = x + 1 \rightarrow du = dx$, se tiene en la integral:

$$= \int \frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x-1+1}{x+1+1}\right| + C = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x}{x+2}\right| + C$$

9.- $\int \frac{dx}{4x-x^2} = \frac{1}{4} \ln\left|\frac{x}{x-4}\right| + C$

Completando cuadrados en el denominador se tiene:

$$\int \frac{dx}{4-(x^2-4x+4)} = \int \frac{dx}{4-(x-2)^2} =$$

efectuando la sustitución $u = x - 2 \rightarrow du = dx$, en la integral.

$$= \int \frac{dx}{2^2-u^2} = \frac{1}{4} \ln\left|\frac{2+u}{2-u}\right| + C = \frac{1}{4} \ln\left|\frac{2+x-2}{2-x+2}\right| + C$$

$$= \frac{1}{4} \ln\left|\frac{x}{4-x}\right| + C$$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \text{arcsen}(x-1) + C$

Solución.

Completando cuadrados se tiene:

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x^2-2x+1)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \text{arcsen}(x-1)+C$$

donde se supuso $u = x - 1 \rightarrow du = dx$

11. $\int \frac{ds}{\sqrt{2as+s^2}} = \ln|s+a+\sqrt{2as+s^2}| + C$

Solución.

Completando cuadrados en el denominador se tiene:

$$= \int \frac{ds}{\sqrt{(s^2+2as+a^2)-a^2}} = \int \frac{ds}{\sqrt{(s+a)^2-a^2}}$$

Sea: $u = s + a \rightarrow du = ds$, reemplazamos en la integral

$$= \int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$$

$$= \ln|s+a+\sqrt{2as+s^2}| + C$$

12. $\int \frac{dy}{y^2 + 3y + 1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left|\frac{2y + 3 - \sqrt{5}}{2y + 3 + \sqrt{5}}\right| + C$

Solución.
Completando cuadrados se tiene:

$$\int \frac{dy}{(y^2 + 3y + \frac{9}{4}) - \frac{9}{4} + 1} = \int \frac{dy}{\frac{(2y + 3)^2}{4} - \frac{5}{4}} =$$

$$= 4 \int \frac{dy}{(2y + 3)^2 - (\sqrt{5})^2}$$

Sea: $u = 2y + 3 \rightarrow \frac{du}{2} = dy$, reemplazamos en la integral

$$= 4 \int \frac{du/2}{u^2 - (\sqrt{5})^2} = 2 \int \frac{du}{u^2 - (\sqrt{5})^2} =$$

$$= 2 . \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln\left|\frac{u - \sqrt{5}}{u + \sqrt{5}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left|\frac{2y + 3 - \sqrt{5}}{2y + 3 + \sqrt{5}}\right| + C$$

13. $\int \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{arctag} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C$

Solución. Completando cuadrados se tiene

$$\int \frac{dx}{x^2 + x + \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{4}} = \int \frac{dx}{\frac{(2x+1)^2}{4} + \frac{3}{4}} = 4 \int \frac{dx}{(2x+1)^2 + (\sqrt{3})^2}$$

Haciendo la siguiente sustitución:

$u = 2x + 1 \rightarrow \frac{du}{2} = dx$, en la integral se tiene

$$= 4 \int \frac{du/2}{u^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \int \frac{du}{u^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{arctag} \frac{u}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \text{arctag} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C$$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x + x^2}} = \ln\left|2x + 1 + 2\sqrt{1 + x + x^2}\right| + C$

Solución. Completando cuadrados se tiene:

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{(2x + 1)^2}{4} + \frac{3}{4}}} = 2 \int \frac{dx}{\sqrt{(2x + 1)^2 + (\sqrt{3})^2}}$$

Sea: $u = 2x + 1 \rightarrow \frac{du}{2} = dx$, reemplazamos en la integral.

$$= 2 \int \frac{du/2}{\sqrt{u^2 + (\sqrt{3})^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + (\sqrt{3})^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + (\sqrt{3})^2}\right| + C$$

$$= \ln\left|2x + 1 + \sqrt{(2x+1)^2 + 3}\right| + C$$

15. $\int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5} = \frac{1}{4} \text{arctag} \frac{2x + 1}{2} + C$

Solución.
Completando cuadrados se tiene:

$$= \int \frac{dx}{(2x + 1)^2 + 4} = \int \frac{dx}{(2x + 1)^2 + 2^2}$$

Sea: $u = 2x + 1 \rightarrow \frac{du}{2} = dx$, reemplazamos en la integral.

$$= \int \frac{du/2}{u^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 + 2^2} = \frac{1}{4} \text{arctag} \frac{u}{2} + C$$

$$= \frac{1}{4} \text{arctag} \frac{2x + 1}{2} + C$$

16. $\int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 4} = \frac{1}{\sqrt{11}} \text{arctag} \frac{3x - 1}{\sqrt{11}} + C$

Solución. Completando cuadrados se tiene:

$$\frac{1}{3} \int \frac{dx}{\frac{(3x-1)^2}{9} + \frac{11}{9}} = \frac{9}{3} \int \frac{dx}{(3x - 1)^2 + 11}$$

Sea : $u = 3x - 1 \rightarrow \frac{du}{3} = dx$, reemplazando en la integral.

$$\therefore\ 3\int\frac{du/3}{u^2+(11)^2} = \frac{3}{3}\int\frac{du}{u^2+(\sqrt{11})^2} = \frac{1}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{11}} + C$$

$$= \frac{1}{11}\ \operatorname{arctg}\frac{3x-1}{11} + C$$

17. $$\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}} = \int\frac{dx}{\sqrt{4(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}x-x^2)}} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}x-x^2}}$$

Completando cuadrados se tiene:

$$= \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{41}{64}-(x+\frac{3}{8})^2}} = \frac{1}{2}\int\frac{8dx}{\sqrt{41-(8x+3)^2}}$$

$$= 4\int\frac{dx}{\sqrt{41-(8x+3)^2}} =$$

Sea : $u = 8x + 3 \rightarrow \frac{du}{8} = dx$, reemplazando en la integral

$$= 4\int\frac{du/8}{\sqrt{41-u^2}} = \frac{1}{2}\int\frac{du}{(41)^2-u^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{u}{\sqrt{41}} + C$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{8x+3}{\sqrt{41}} + C$$

Hallar el valor de c/u de las **sigtes** integrales y comprobar el resultado por diferenciación.

18. $$\int\frac{dx}{x^2+2x+10} = \int\frac{dx}{(x^2+2x+1)+9} = \int\frac{dx}{(x+1)^2+9}$$

efectuando la sustitución: $u = x + 1 \rightarrow du = dx$ en la integral se tiene:

$$= \int\frac{du}{u^2+3^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{u}{3} + C = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3} + C$$

La Comprobación queda como ejercicios para ud.

19. $$\int\frac{dy}{3-2y-y^2} = \int\frac{dy}{4-(y^2+2y+1)}$$

$$= \int\frac{dy}{4-(4+1)^2} =$$

Sea: $u = y + 1 \rightarrow du = dy$

$$\therefore \int\frac{du}{4-u^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+u}{2-u}\right| + C =$$

$$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+y+1}{2-y-1}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{3+y}{1-y}\right| + C$$

20. $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}} = \int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+4)-1}} = \int\frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2-1}}$$

Sea: $u = x + 2 \rightarrow du = dx$

$$\therefore \int\frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2-1}\right| + C$$

$$= \ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+4}\right| + C$$

21. $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}} = \int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-1}}$$

Sea: $u = x + 1 \rightarrow du = dx$, reemplazando en la integral

$$\int\frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2-1}\right| + C = \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x}\right| + C$$

22. $$\int\frac{dx}{2+2x-x^2} = \int\frac{dx}{1-(x-1)^2}$$

$t - 2 = v \rightarrow dv = dt$

$$\therefore \int \frac{dv}{(\sqrt{19})^2 - v^2} = \frac{1}{2\sqrt{19}} \ln\left|\frac{\sqrt{19} + v}{\sqrt{19} - v}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{19}} \ln\left|\frac{\sqrt{19} - 2 + t}{\sqrt{19} + 2 - t}\right| + C$$

29. $$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 + 12x + 8}} = \frac{1}{3} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \frac{4x}{3} + \frac{8}{9}}} = \frac{1}{3} \int \frac{3dx}{\sqrt{(3x + 2)^2 + 4}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{(3x + 2)^2 + 4}}$$

$u = 3x + 2 \rightarrow \frac{du}{3} = dx$

$$\therefore \int \frac{du/3}{\sqrt{u^2 + 2^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 2^2}} = \frac{1}{3} \ln\left|u + \sqrt{u^2 + 4}\right| + C$$

$$= \frac{1}{3} \ln\left|3x + 2 + \sqrt{(3x + 2)^2 + 4}\right| + C$$

30. $$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 12x + 7}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 3x + \frac{7}{4}}} = \frac{1}{2} \int \frac{2dx}{\sqrt{(2x + 3)^2 - 2}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{(2x + 3)^2 - 2}}$$

$u = 2x + 3 \rightarrow \frac{du}{2} = dx$

$$\therefore \int \frac{du/2}{\sqrt{u^2 - 2}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 2}} = \frac{1}{2} \ln\left|u + \sqrt{u^2 - 2}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left|2x + 3 + \sqrt{(2x + 3)^2 - 2}\right| + C$$

Cuando el integrando es una fracción cuyo numerador es una expresión de 1º grado; mientras que el denominador es una expresión de 2º grado o raíz cuadrada de una tal expresión: su solución se procede del siguiente Modo del numerador se separa la derivada $(2ax + b)$ del denominador.

$$\int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + C} dx = \int \frac{\frac{m}{2a}(2ax + b) + (n - \frac{mb}{2a})}{ax^2 + bx + C}$$

$$= \frac{m}{2a} \ln(ax^2 + bx + C) + (n - \frac{mb}{2a}) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + C}$$

y de esta manera se halla una integral directa

VERIFICAR LAS SIGUIENTES INTEGRALES

1. $$\int \frac{1 + 2x}{x^2 + 1} dx = \operatorname{arctg} x + \ln(x^2 + 1) + C$$

Solución.

$$= \int \frac{dx}{x^2 + 1} + \int \frac{2xdx}{x^2 + 1} = \int \frac{dx}{x^2 + 1} + \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1}$$

$$= \operatorname{arctg} x + \ln(x^2 + 1) + C$$

2. $$\frac{(2x + 1)dx}{x^2 - 1} = 2\, x^2 - 1 + \ln(x + \; x^2 - 1) + C$$

Solución : $$= \frac{2xdx}{x^2 - 1} + \frac{dx}{x^2 - 1}$$

$$= \int (x^2 - 1)^{-1/2} d(x^2 - 1) + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$= 2(x^2 - 1)^{1/2} + \ln(x + \; x^2 - 1) + C$$

3. $$\int \frac{(3x - 1)dx}{x^2 + 9} = \frac{3}{2} \ln(x^2 + 9) - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C$$

Solución

$$= \int \frac{3x\,dx}{x^2+9} - \int \frac{dx}{x^2+9} = \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+9)}{x^2+9} - \int \frac{dx}{x^2+9}$$

$$= \frac{3}{2}\ln(x^2+9) - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C$$

4. $$\int \frac{(3s-2)ds}{\sqrt{9-s^2}} = -3\sqrt{9-s^2} - 2\operatorname{arcsen}\frac{s}{3} + C$$

Solución.

$$= \int \frac{3s\,ds}{\sqrt{9-s^2}} - 2\int \frac{ds}{\sqrt{9-s^2}} = 3\int (9-s^2)^{-1/2} s\,ds - 2\int \frac{ds}{\sqrt{9-s^2}}$$

$$= -\frac{3}{2}\int (9-s^2)^{-1/2}\, d(9-a^2) - 2\int \frac{ds}{9-s^2}$$

$$= -3(9-s^2)^{1/2} - 2\operatorname{arcsen}\frac{s}{3} + C$$

5. $$\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{x^2+4}} = \sqrt{x^2+4} + 3\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right| + C$$

Solución.

$$= \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+4}} + 3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{2}\int (x^2+4)^{-1/2} d(x^2+4) + 3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$= (x^2+4)^{1/2} + 3\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right| + C$$

6. $$\int \frac{(2x-5)dx}{3x^2-2} = \frac{1}{3}\ln(3x^2-2) - \frac{5\sqrt{6}}{12}\ln\left|\frac{3x-\sqrt{6}}{3x+\sqrt{6}}\right| + C$$

Solución.

$$= \int \frac{2x\,dx}{3x^2-2} - 5\int \frac{dx}{3x^2-2} = 2\int \frac{x\,dx}{3x^2-2} - 5\int \frac{dx}{(\sqrt{3}x)^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{d(3x^2-2)}{3x^2-2} - \frac{5}{\sqrt{3}}\int \frac{d(\sqrt{3}\,x)}{(\sqrt{3}x)^2-(\sqrt{2})^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln(3x^2-2) - \frac{5}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x-\sqrt{2}}{\sqrt{3}x+\sqrt{2}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{3}\ln(3x^2-2) - \frac{5\sqrt{6}}{12}\ln\frac{3x-\sqrt{6}}{3x+\sqrt{6}} + C$$

7. $$\int \frac{(x+3)dx}{6x-x^2} = -\frac{1}{2}\ln(6x-x^2) - \ln\left(\frac{x-6}{x}\right) + C$$

Solución.

$$= -\int \frac{(x+3)dx}{x^2-6x} = -\int \frac{\frac{1}{2}(2x-6)+6}{x^2-6x}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{(2x-6)dx}{x^2-6x} - 6\int \frac{dx}{x^2-6x}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{(2x-6)dx}{x^2-6x} - 6\int \frac{dx}{(x^2-6x+9)-9}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{(2x+6)dx}{x^2-6x} - 6\int \frac{dx}{(x-3)^2-9}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(x^2-6x) - \ln\left|\frac{x-3-3}{x-3+3}\right| + C$$

8. $$\int \frac{(2x+5)dx}{x^2+2x+5} = \ln(x^2+2x+5) + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C$$

Solución.

$$= \int \frac{(2x+2)+(5-2)}{x^2+2x+5}dx \qquad \int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+5} + 3\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$$

$$= \int \frac{d(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5} + 3\int \frac{dx}{(x^2+2x+1)+4}$$

$$= \int \frac{d(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5} + 3\int \frac{dx}{(x+1)^2+4} =$$

$$= \ln(x^2 + 2x + 5) + \frac{3}{2}\,\text{arctg}\,\frac{x+1}{2} + C$$

9. $$\int \frac{(1 - x)dx}{4x^2 - 4x - 3} = -\frac{1}{8}\ln(4x^2 - 4x - 3) + \frac{1}{16}\ln\left|\frac{2x - 3}{2x + 1}\right| + C$$

Solución.

$$= \int \frac{-\frac{1}{8}(8x - 4) + (1 - \frac{1}{2})}{4x^2 - 4x - 3}\,dx = -\frac{1}{8}\int\frac{(8x-4)dx}{4x^2-4x-3} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{4x^2-4x-3}$$

$$= -\frac{1}{8}\int\frac{d(4x^2 - 4x - 3)}{4x^2 - 4x - 3} + \frac{1}{8}\int\frac{4dx}{(2x - 1)^2 - 4}$$

$$= -\frac{1}{8}\int\frac{d(4x^2 - 4x - 3)}{4x^2 - 4x - 3} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(2x - 1)^2 - 4}$$

$$= -\frac{1}{8}\int\frac{d(4x^2 - 4x - 3)}{4x^2 - 4x - 3} + \frac{1}{4}\int\frac{d(2x - 1)}{(2x - 1)^2 - 4}$$

$$= -\frac{1}{8}\ln(4x^2 - 4x - 3) + \frac{1}{16}\ln\left|\frac{2x - 1 - 2}{2x - 1 + 2}\right| + C$$

10. $$\int\frac{(3x - 2)dx}{1 - 6x - 9x^2} = -\frac{1}{6}\ln(1 - 6x - 9x^2) + \frac{\sqrt{2}}{12}\ln\left|\frac{3x + 1 - 2}{3x + 1 + 2}\right| + C$$

Solución.

$$= \int\frac{-\frac{3}{18}(-6 - 18x) + (-2 + \frac{18}{18})}{1 - 6x - 9x^2}\,dx = -\frac{1}{6}\int\frac{(-6-18x)dx}{1-6x-9x^2}$$

$$- \int\frac{dx}{1 - 6x - 9x^2}$$

$$= -\frac{1}{6}\int\frac{d(1 - 6x - 9x^2)}{1 - 6x - 9x^2} + \frac{1}{3}\int\frac{3\,dx}{-2 + (3x + 1)^2}$$

$$= -\frac{1}{6}\int\frac{d(1 - 6x - 9x^2)}{1 - 6x - 9x^2} + \frac{1}{3}\int\frac{d(3x + 1)}{(3x + 1)^2 - 2}$$

$$= -\frac{1}{6}\ln(1 - 6x - 9x^2) + \frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\left|\frac{3x + 1 - \sqrt{2}}{3x + 1 + \sqrt{2}}\right| + C$$

11. $$\int\frac{(x + 2)dx}{\sqrt{x^2 + 2x}} = \sqrt{x^2 + 2x} + 2\ln|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x}| + C$$

Solución.

$$= \int\frac{\frac{1}{2}(2x + 2) + (3 - \frac{2}{2})}{\sqrt{x^2 + 2x}}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{(2x + 2)dx}{\sqrt{x^2 + 2x}} + 2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x}}$$

$$= \frac{1}{2}\int(x^2 + 2x)^{-1/2}d(x^2 + 2x) + 2\int\frac{dx}{(x + 1)^2 - 1}$$

$$= (x^2 + 2x)^{1/2} + 2\ln|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x}| + C$$

12. $$\int\frac{(x + 2)dx}{\sqrt{4x - x^2}} = -\sqrt{4x - x^2} + 4\,\text{arcsen}(\frac{x - 2}{2}) + C$$

Solución.

$$= \int\frac{-\frac{1}{2}(4 - 2x) + (2 + \frac{4}{2})}{\sqrt{4x - x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int\frac{(4 - 2x)dx}{\sqrt{4x - x^2}} + 4\int\frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int(4x - x^2)^{-1/2}d(4x - x^2) + 4\int\frac{dx}{\sqrt{4 - (x - 2)^2}}$$

$$= -(4x - x^2)^{1/2} + 4\,\text{arcsen}(\frac{x - 2}{2}) + C$$

13. $$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{27 + 6x - x^2}} = -\sqrt{27 + 6x - x^2} + 3\,\text{arcsen}(\frac{x - 3}{6}) + C$$

Solución.

$$= \int\frac{-\frac{1}{2}(6 - 2x) + (0 + \frac{6}{2})}{\sqrt{27 + 6x - x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int\frac{(6-2x)dx}{\sqrt{27 + 6x - x^2}} + 3\int\frac{dx}{\sqrt{27 + 6x - x^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\ (27+6x-x^2)^{-1/2}\, d(27+6x-x^2) + 3\int\frac{dx}{\sqrt{36-(x-3)^2}}$$

$$= -(27+6x-x^2)^{1/2} + 3\ \text{arcsen}\ \frac{(x-3)}{6}$$

14 $\displaystyle\int\frac{(2x+2)dx}{\sqrt{19-5x+x^2}} = 3\sqrt{19-5x+x^2} + \frac{19}{1}\ln\left|\, x-\frac{5}{2}+\ 19-5x+x^2\right| + C$

Solución.

$$= \int\frac{\frac{3}{2}(-5+2x)+(2+\frac{15}{2})}{\sqrt{19-5x+x^2}}dx = \frac{3}{2}\int\frac{(-5+2x)dx}{\sqrt{19-5x+x^2}}$$

$$+\frac{19}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{19-5x+x^2}}$$

$$= \frac{3}{2}\int(19-5x+x^2)^{-1/2}d(19-5x+x^2) + \frac{19}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(x-\frac{5}{2})^2+\frac{51}{4}}}$$

$$= 3(19-5x+x^2)^{1/2} + \frac{19}{2}\ln\ \ x-\frac{5}{2}+\sqrt{19-5x+x^2}\ + C$$

15. $\displaystyle\int\frac{(3x-2)dx}{\sqrt{4x^2-4x+5}} = \frac{3}{4}\ \ 4x^2-4x+5-\frac{1}{4}\ln\left|2x-1+\ 4x^2-4x+5\right| + C$

Solución.

$$= \int\frac{\frac{3}{8}(8x-4)+(-2+\frac{12}{8})}{\sqrt{4x^2-4x+5}} = \frac{3}{8}\int\frac{(8x-4)dx}{\sqrt{4x^2-4x+5}} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2-4x+5}}$$

$$= \frac{3}{8}\ (4x^2-4x+5)^{-1/2}\, d(4x^2-4x+5) - \frac{1}{4}\ \ \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+1}$$

$$= \frac{3}{4}(4x^2-4x+5)^{1/2} - \frac{1}{4}\ln\left|x-\frac{1}{2}+\ \ (x-\frac{1}{2})^2+1\right| + C$$

16. $\displaystyle\int\frac{(8x-3)dx}{\sqrt{12x-4x^2-5}} = -2\sqrt{12x-4x^2-5} + \frac{9}{2}\ \text{arcsen}\left(\frac{2x-3}{2}\right) + C$

Solución.

$$= \int\frac{-\frac{8}{8}(-8x+12)+(-3+\frac{96}{8})}{\sqrt{12x-4x^2-5}} = -\int\frac{(-8x+12)dx}{\sqrt{12x-4x^2-5}}$$

$$+\ 9\int\frac{dx}{\sqrt{12x-4x^2-5}}$$

$$= -\int(12x-4x^2-5)^{-1/2}d(12x-4x^2-5) + \frac{9}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-(x-\frac{3}{2})^2}}$$

$$= -2(12x-4x^2-5)^{1/2} + \frac{9}{2}\ \text{arcsen}(x-\frac{3}{2}) + C$$

Determinar el valor de C/U de las siguientes integrales, comprobar los resultados por diferenciación.
(La comprobación se deja como ejercicio).

17. $\displaystyle\int \frac{(4x + 3)dx}{x^2 + 1} = \int \frac{4xdx}{x^2 + 1} + 3\int \frac{dx}{x^2 + 1} = 4\int \frac{xdx}{x^2+1} + 3\int \frac{dx}{x^2+1}$

$\displaystyle = 2\int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} + 3\int \frac{dx}{x^2 + 1} = 2\ln(x^2 + 1) + 3 \text{ arctg } x + C$

18. $\displaystyle\int \frac{3x - 4}{x^2 - 1}dx = 3\int \frac{xdx}{x^2 - 1} - 4\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2-1)}{x^2 - 1} - 4 \frac{dx}{x^2 - 1}$

$\displaystyle = \frac{3}{2}\ln(x^2 - 1) - \frac{4}{2}\ln\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right| + C$

19. $\displaystyle\int \frac{(2x + 3)dx}{\sqrt{2 - 3x^2}} = 2\int \frac{xdx}{\sqrt{2 - 3x^2}} + 3\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x^2}}$

$\displaystyle = -\frac{1}{3}\int (2 - 3x^2)^{-1/2}d(2 - 3x^2) + \frac{3}{\sqrt{3}}\int \frac{d(\sqrt{3}x)}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3}x)^2}}$

$\displaystyle = -\frac{2}{3}(2 - 3x^2)^{1/2} + \sqrt{3}\text{ arcsen }\frac{\sqrt{3}\,x}{\sqrt{2}} + C$

20. $\displaystyle\int \frac{(4x - 1)dx}{\sqrt{3 + 5x^2}} = 4\int \frac{xdx}{\sqrt{3 + 5x^2}} - \int \frac{dx}{\sqrt{3 + 5x^2}}$

$\displaystyle = \frac{4}{10}\int (3 + 5x^2)^{-1/2}d(3 + 5x^2) - \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{d(\sqrt{5}x)}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{5}\,x)^2}}$

$\displaystyle = \frac{4}{5}(3 + 5x^2)^{1/2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\sqrt{5}x + \sqrt{3 + 5x^2}\right| + C$

21. $\displaystyle\int \frac{(4x + 5)dx}{\sqrt{3x - x^2}} = \int \frac{-\frac{4}{2}(3 - 2x) + (5 + \frac{12}{2})}{\sqrt{3x - x^2}}dx =$

$\displaystyle = -2\int \frac{(3-2x)dx}{\sqrt{3x - x^2}} + 11\int \frac{dx}{\sqrt{3x - x^2}}$

$\displaystyle = -2\int (3x - x^2)^{-1/2}d(3x - x^2) + 11\int \frac{dx}{\sqrt{(\frac{3}{2})^2 - (x - \frac{3}{2})^2}}$

$\displaystyle = -4(3x - x^2)^{1/2} + 11 \text{ arcsen }\frac{x - \frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} + C$

22. $\displaystyle\int \frac{(x + 2)dx}{x^2 - 6x + 5} = \int \frac{\frac{1}{2}(2x - 6) + (2 + \frac{6}{2})}{x^2 - 6x + 5}dx$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\int \frac{(2x - 6)dx}{x^2 - 6x + 5} + 5\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 5}$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2 - 6x + 5)}{x^2 - 6x + 5} + 5\int \frac{dx}{(x - 3)^2 - 4}$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\ln(x^2 - 6x + 5) + \frac{5}{4}\ln\left|\frac{x - 3 - 2}{x - 3 + 2}\right| + C$

23. $\displaystyle\int \frac{(5x + 2)dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} = \int \frac{\frac{5}{2}(2x + 2) + (2 - \frac{10}{2})}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}dx$

$\displaystyle = \frac{5}{2}\int \frac{(2x + 2)dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} - 3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$

$\displaystyle = \frac{5}{2}\int (x^2 + 2x + 5)^{-1/2}d(x^2 + 2x + 5) - 3\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2 + 4}}$

$\displaystyle = 5(x^2 + 2x + 5)^{1/2} - 3\ln\left(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 5}\right| + C$

24. $$\int \frac{(1-x)dx}{\sqrt{x^2+4x+3}} = \int \frac{-\frac{1}{2}(2x+4)+(1+\frac{4}{2})}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{(2x+4)dx}{\sqrt{x^2+4x+3}} + 3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 2(x^2+4x+3)^{1/2} + 3\ln(x+2+\sqrt{x^2+4x}$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 2(x^2+4x+3)^{1/2} + 3\ln(x+2+\sqrt{x^2+4x+3}) + C$$

25. $$\int \frac{(x+4)dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1)+(4-\frac{1}{2})}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{7}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$= \frac{1}{2}\int (x^2+x+1)^{-1/2}d(x^2+x+1) + \frac{7}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}}$$

$$= (x^2+x+1)^{1/2} + \frac{7}{2}\ln|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}| + C$$

26. $$\int \frac{(2x+7)dx}{2x^2+2x+1} = \int \frac{\frac{1}{2}(4x+2)+(7-\frac{4}{4})}{2x^2+2x+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(4x+2)dx}{2x^2+2x+1} + 6\int \frac{dx}{2x^2+2x+1}$$

$$= \frac{1}{2}\int (2x^2+2x+1)^{-1/2}d(2x^2+2x+1) + \frac{6}{2}\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}$$

$$= (2x^2+2x+1)^{1/2} + 6\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+\frac{1}{2}}{1/2} + C$$

27. $$\int \frac{(3x+8)dx}{\sqrt{9x^2-3x-1}} = \int \frac{\frac{3}{18}(18x-3)+(8+\frac{9}{18})}{\sqrt{9x^2-3x-1}}$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{(18x-3)dx}{\sqrt{9x^2-3x-1}} + \frac{17}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-3x-1}}$$

$$= \frac{1}{6}\int (9x^2-3x-1)^{-1/2}d(9x^2-3x-1) + \frac{17}{6}\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\frac{1}{6})^2-(\frac{\sqrt{5}}{6})^2}}$$

$$= \frac{1}{3}(9x^2-3x-1)^{1/2} + \frac{17}{6}\ln\left|x-\frac{1}{6}+\sqrt{(x-\frac{1}{6})^2-(\frac{5}{6})^2}\right| + C$$

28. $$\int \frac{(6-x)dx}{\sqrt{4x^2-12x+7}} = \int \frac{-\frac{1}{8}(8x-12)+(6-\frac{12}{8})}{\sqrt{4x^2-12x+7}}$$

$$= -\frac{1}{8}\int \frac{(8x-12)dx}{\sqrt{4x^2-12x+7}} + \frac{9}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-12x+7}}$$

$$= -\frac{1}{8}\int (4x^2-12x+7)^{-1/2}d(4x^2-12x+7) + \frac{9}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2-\frac{1}{2}}}$$

$$= -\frac{1}{4}(4x^2-12x+7) + \frac{9}{4}\ln|x-\frac{3}{2}+\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2-\frac{1}{2}}| + C$$

Verificar las Siguientes Integrales

1. $\int\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}\,dx = \frac{x}{4}\sqrt{x^2-4} - \ln|x+\sqrt{x^2-4}| + C$

Solución.

$$= \int\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}dx = \frac{1}{2}\int\sqrt{x^2-4}\,dx = \frac{x}{4}\sqrt{x^2-4} - \ln|x+\sqrt{x^2-4}| + C$$

2. $\int\sqrt{4x^2+9}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{4x^2+9} + \frac{9}{4}\ln|2x+\sqrt{4x^2+9}| + C$

Solución.

$$= \int\sqrt{(2x)^2+3^2}\,dx$$

Sea: $u = 2x \rightarrow \frac{du}{2} = dx$, sustituímos y se tiene:

$$= \frac{1}{2}\int\sqrt{u^2+3^2}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u}{2}\sqrt{u^2+9} + \frac{9}{4}\ln|u+\sqrt{u^2+9}| + C$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{4x^2+9} + \frac{9}{4}\ln|2x+\sqrt{4x^2+9}| + C$$

3. $\int\sqrt{3-2x-x^2}\,dx = \frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2} + 2\arcsen\frac{x+1}{2} + C$

Solución.
Completando cuadrados se tiene:

$$= \int\sqrt{4-(x+1)^2}\,dx =$$

$$u = x+1 \rightarrow du = dx$$

$$\therefore \int\sqrt{4-u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{4-u^2} + 2\arcsen\frac{u}{2} + C$$

$$= \frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2} + 2\arcsen\frac{x+1}{2} + C$$

4. $\int\sqrt{5-2x+x^2}\,dx = \frac{x-1}{2}\sqrt{5-2x+x^2} + 2\ln|x-1+\sqrt{5-2x+x^2}| + C$

Solución.
Completando cuadrados se tiene:

$$= \int\sqrt{(x-1)^2+4}\,dx = \frac{x-1}{2}\sqrt{5-2x+x^2} +$$

$$+ 2\ln|x-1+\sqrt{5-2x+x^2}| + C$$

5. $\int\sqrt{2x-x^2}\,dx = \frac{x-1}{2}\sqrt{2x-x^2} + \frac{1}{2}\arcsen(x-1) + C$

Solución.
Completando cuadrados se tiene:

$$\int\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx = \frac{x-1}{2}\sqrt{1-(x-1)^2} + \frac{1}{2}\arcsen(x-1) + C$$

6. $\sqrt{10-4x+4x^2}\,dx = \frac{2x-1}{4}\sqrt{10-4x+4x^2} +$

$$+ \frac{9}{4}\ln|2x-1+\sqrt{10-4x+x^2}| + C$$

Solución.
Completando cuadrado se tiene:

$$= \int\sqrt{(2x-1)^2+9}\,dx$$

Sea: $u = 2x-1 \rightarrow \frac{du}{2} = dx$

$$\therefore \frac{1}{2}\int\sqrt{u^2+9}\,du = \frac{1}{4}\cdot u\sqrt{u^2+9} + \frac{9}{4}\ln|u+\sqrt{u^2+9}| + C$$

$$= \frac{2x-1}{4}\sqrt{10-4x+4x^2} + \frac{9}{4}\ln|2x-1+\sqrt{10-4x+4x^2}| + C$$

Hallar c/u de las siguientes integrales y comprobar los resultados por diferenciación. (la comprobación como ejercicio para ud.)

7. $\int\sqrt{16-9x^2}\,dx = \int\sqrt{4^2-(3x)^2}\,dx = \frac{1}{3}\int\sqrt{4^2-(3x)^2}\,d(3x)$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{3x}{2}\sqrt{4^2-(3x)^2} + \frac{8}{3}\arcsen\frac{3x}{4} + C$$

8.- $\int\sqrt{9x^2-1}\,dx = \int\sqrt{(3x)^2-1}\,dx = \frac{1}{3}\int\sqrt{(3x)^2-1}\,d(3x) =$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{(9x^2)-1} - \frac{1}{6}\ln|3x+\sqrt{9x^2-1}| + C$$

9.- $\int\sqrt{5+2x^2}\,dx = \int\sqrt{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{2}x)^2}\,dx$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int\sqrt{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{2}x)^2}\;d(\sqrt{2}x)$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{5+2x^2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\;\ln\left|\sqrt{2}x+\sqrt{5+2x^2}\right| + C$$

10. $\int\sqrt{5-4x-x^2}\,dx = \int\sqrt{9-(x+2)^2}\,dx =$

$$= \int\sqrt{9-(x+2)^2}\,d(x+2) = \frac{x+2}{2}\sqrt{5-4x-x^2} + \frac{9}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x+2}{3} + C$$

11. $\int\sqrt{5+2x+x^2}\,dx = \int\sqrt{(x+1)^2+4}\,dx$

$$= \frac{x+1}{2}\sqrt{(x+1)^2+4} + 2\ln|x+1+\sqrt{(x+1)^2+4}| + C$$

12. $\int\sqrt{x^2-8x+7}\,dx = \int\sqrt{(x-4)^2-9}\,dx =$

$$= \frac{x-4}{2}\sqrt{x^2-8x+7} - \frac{9}{2}\ln|x-4+\sqrt{x^2-8x+7}| + C$$

13. $\int\sqrt{4-2x-x^2}\,dx = \int\sqrt{5-(x+1)^2}\,dx$

$$= \frac{x+1}{2}\sqrt{4-2x-x^2} + \frac{5}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x+1}{\sqrt{5}} + C$$

14. $\int\sqrt{x^2-2x+8}\,dx = \int\sqrt{(x-1)^2+7}\,dx$

$$= \frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+8} + \frac{7}{2}\ln|x-1+\sqrt{x^2-2x+8}| + C$$

INTEGRACION DE DIFERENCIALES TRIGONOMETRICAS

1° Caso :

Integrales de la forma :

$$\int \text{sen}^m x\,\cos^n x\,dx \qquad (1)$$

a) Cuando $m = 2k+1$ es un número impar y positivo se supone.

$$\int \text{sen}^m x\cos^n x\,dx = -\int \text{sen}^{2k} x\,\cos^n x\;d(\cos x) = -$$

$$= -\int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x\,d(\cos x)$$

b) Cuando $n = 2k+1$ es un número impar y positivo se supone:

$$\int \text{sen}^m x\,\cos^n x\,dx = \int \cos^{2k}\text{sen}^n x\,d(\text{sen}x) =$$

$$= \int (1-\text{sen}^2 x)\,\text{sen}^n x\,d(\text{sen}\,x)$$

VERIFICAR LAS SIGUIENTES INTEGRACIONES

1. $\int \text{sen}^3 x\,dx = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$

Solución. $m = 2k+1$ es impar

$$\therefore \int \text{sen}^2 x\,\text{sen}x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\,\text{sen}x\,dx$$

$$= \int \text{sen}x\,dx - \int \cos^2 x\,\text{sen}x\,dx$$

$$= \int \text{sen}x\,dx + \int (\cos x)^2 d(\cos x) = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

$$= \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$$

2. $\int \cos^2\phi\;\text{sen}\phi\,d\phi = -\frac{1}{3}\cos^3\phi + C$, haciendo:

Solución : $u = \cos\phi \qquad -du = -\text{sen}\phi\,d\phi$

$$= \cos^2\phi\;\text{sen}\phi d\phi = -\;u^2 du = -\frac{1}{3}u^3 + C = -\frac{1}{3}\cos^3\phi + C$$

3. $\int \text{sen}^3 6x\cos 6x\,dx = \frac{1}{24}\,\text{sen}^4\,6x + C$

Solución :

Sea $u = \operatorname{sen}^2 6x \rightarrow \frac{du}{6} = \cos 6x\,dx$

$$\therefore \int u^3 \frac{du}{6} = \frac{1}{6}\int u^3 du = \frac{1}{24}u^4 + C = \frac{1}{24}\operatorname{sen}^4 6x + C$$

4. $\int \cos^3 2\theta \operatorname{sen} 2\theta\, d\theta = -\frac{1}{8}\cos^4 2\theta + C$

Solución:

Sea; $u = \cos 2\theta \rightarrow -\frac{du}{2} = \operatorname{sen} 2\theta\, d\theta$

$$\therefore -\int u^3\left(\frac{du}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int u^3 du = -\frac{1}{8}u^4 + C = -\frac{1}{8}\cos^4 2\theta + C$$

5. $\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}dx = -\frac{1}{3}\cos^3 x + \csc x + C$

Solución : $n = 2k + 1$ impar

$$\rightarrow = \int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^4 x}\cos x dx = \int \frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^4 x}d(\operatorname{sen} x) = \int \frac{d(\operatorname{sen}\ x)}{\operatorname{sen}^4 x}$$

$$- \int \frac{d(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$= \int (\operatorname{sen} x)^{-4}\, d(\operatorname{sen} x) - \int (\operatorname{sen} x)^{-2}\, d(\operatorname{sen} x)$$

$$= \frac{(\operatorname{sen} x)^{-3}}{-3} - \frac{(\operatorname{sen} x)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{3}\frac{1}{\operatorname{sen}^3 x} + \frac{1}{\operatorname{sen} x} + C$$

$$= \csc x - \frac{1}{3}\csc^3 x + C$$

6. $\int \frac{\operatorname{sen}^3\phi}{\cos^2\phi}d\phi = \sec\phi + \cos\phi + C$

$m = 2k + 1$ impar

$$= \int \frac{\operatorname{sen}^2\phi}{\cos^2\phi}\operatorname{sen}\phi d\phi = -\int \frac{(1-\cos^2\phi)d(\cos\phi)}{\cos^2\phi}$$

$$= -\int \frac{d(\cos\phi)}{\cos^2\phi} + \int d(\cos\phi)$$

$$= -\int \cos^{-2}\phi d(\cos\phi) + \int d(d\phi) = -\frac{\cos^{-1}\phi}{-1} + \cos\phi + C$$

$$= \frac{1}{\cos\phi} + \cos\phi + C = \sec\phi + \cos\phi + C$$

7. $\int \cos^4 x \operatorname{sen}^3 x dx = -\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x + C$

Solución :

$m = 2k + 1$ impar y positivo

$$\rightarrow = \int \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x \cos^4 x dx = -\int (1 - \cos^2 x)\cos^4 x d(\cos x)$$

$$= -\int \cos^4 x d(\cos x) + \int \cos^6 x d(\cos x)$$

$$= -\frac{\cos^5}{5} + \frac{\cos^7}{7} + C$$

8. $\int \operatorname{sen}^5 x dx = -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$

Solución :

$m = 2k + 1$, impar y positivo

$$= \int \operatorname{sen}^4 x \operatorname{sen} x\, dx = -\int (1 - \cos^2 x)^2 d(\cos x)$$

efectuando la operación del trinomio se tiene:

$$= -\int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)d(\cos x) = -$$

$$= -\int d(\cos x) + 2\int \cos^2 x d(\cos x) - \int \cos^4 x d(\cos x)$$

$$= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

9. $\int \cos^5 x dx = \operatorname{sen} x - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + C$

Solución :

$n = 2k + 1$ impar y positivo

$$= \int \cos^4 x \cos x dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)^2 d(\operatorname{sen} x) =$$

$$= \int (1 - 2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x)d(\operatorname{sen} x)$$

$$= \int d(\operatorname{sen}x) - 2\int \operatorname{sen}^2 x\, d(\operatorname{sen}x) + \int \operatorname{sen}^4 x\, d(\operatorname{sen}x)$$

$$= \operatorname{sen}x - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + C$$

10. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^5 y}{\sqrt{\cos y}}\, dy = -2\sqrt{\cos y}\left(1 - \frac{2}{5}\cos^2 y + \frac{1}{9}\cos^4 y\right) + C$

Solución :

$n = 2k + 1$ impar positivo

$$= \frac{\operatorname{sen}^4 y}{\cos y}\operatorname{sen}y\,dy = -\int \frac{(1-\cos^2 y)^2}{\sqrt{\cos y}}\, d(\cos y)$$

$$= -\int \frac{(1 - 2\cos^2 y + \cos^4 y)\, d(\cos y)}{\sqrt{\cos y}}$$

$$= -\int \frac{d(\cos y)}{\sqrt{\cos y}} + 2\int \frac{\cos^2 y}{\sqrt{\cos y}}\, d(\cos y) - \int \frac{\cos^4 y}{\cos y}\, d(\cos y)$$

$$= -\int \cos^{-1/2} y\, d(\cos y) + 2\int \cos^{3/2} y\, d(\cos y) - \int \cos^{7/2} y\, d(\cos y)$$

$$= -2\cos^{1/2} y + \frac{4}{5}\cos^{5/2} y - \frac{2}{9}\cos^{9/2} y + C$$

$$= -2\cos^{1/2}\left(1 - \frac{2}{5}\cos^2 y + \frac{1}{9}\cos^4 y\right) + C$$

11. $\displaystyle\int \frac{\cos^5 t}{\sqrt[3]{\operatorname{sen} t}}\, dt = \frac{3}{2}\operatorname{sen}^{2/3} t\left(1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 t + \frac{1}{7}\operatorname{sen}^4 t\right) + C$

Solución :

$n = 2k + 1$ impar y positivo

$$\to \ = \int \frac{\cos^4 t\cos t\,dt}{\sqrt{\operatorname{sen} t}} = \int \frac{(1 - \operatorname{sen}^2 t)^2}{\operatorname{sen}^{1/3} t}\, d(\operatorname{sen}t)$$

$$= \int \frac{(1 - 2\operatorname{sen}^2 t + \operatorname{sen}^4 t)}{\operatorname{sen}^{1/3} t}\, d(\operatorname{sen}t)$$

$$= \int \operatorname{sen}^{-1/3} t\, d(\operatorname{sen}t) - 2\int \operatorname{sen}^{5/3} t\, d(\operatorname{sen}t) + \int \operatorname{sen}^{11/3} t\, d(\operatorname{sen}t)$$

$$= \frac{3}{4}\operatorname{sen}^{2/3} t - \frac{3}{4}\operatorname{sen}^{8/3} t + \frac{3}{14}\operatorname{sen}^{14/3} t + C$$

factorizando se tiene:

$$\frac{3}{2}\operatorname{sen}^{2/3}\left(1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 t + \frac{1}{7}\operatorname{sen}^4 t\right) + C$$

Calcular las siguientes integrales y comprobar los resultados por diferenciación (La comprobación se deja como ejercicio para ud.)

12. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 2\theta\, d\theta$

Solución :

$m = 2k + 1$, impar y positivo

$$= \int \operatorname{sen}^2 2\theta \operatorname{sen}2\theta\, d\theta = -\frac{1}{2}\int (1 - \cos^2\theta)\, d(\cos 2\theta)$$

$$= -\frac{1}{2}\int d(\cos 2\theta) + \frac{1}{2}\int \cos^2 2\theta\, d(\cos 2\theta)$$

$$= -\frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{6}\cos^3 2\theta + C$$

13. $\displaystyle\int \cos^3\frac{\theta}{2}\, d\theta$

Solución :

$n = 2k + 1$ impar y positivo

$$= \int \cos^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = 2\int \left(1 - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right) d\left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= 2\int d\left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right) - 2\int \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\, d\left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= 2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3\frac{\theta}{2} + C$$

14. $\displaystyle\int \operatorname{sen}2x\cos 2x\, dx$

Solución :

Sea: $u = \operatorname{sen}2x \ \to \ \dfrac{du}{2} = \cos 2x\, dx$

$$\therefore = \int u\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int udu = \frac{1}{4}u^2 + C = \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2x + C$$

1.. $\int \operatorname{sen}^3 t \cos^3 t\, dt$

$m = 2k + 1$ impar positivo

$$\rightarrow \int \operatorname{sen}^2 t \operatorname{sen} t \cos^3 t\, dt = -\int (1 - \cos^2 t)\cos^3 t\, d(\cos t)$$

$$= -\int \cos^3 t\, d(\cos t) + \int \cos^5 t\, d(\cos t)$$

$$= -\frac{1}{4}\cos^4 t + \frac{1}{6}\cos^6 t + C$$

16. $\int \cos^3 \frac{\phi}{2} \operatorname{sen}^2 \frac{\phi}{2}\, d\phi =$

$n = 2k + 1$, impar positivo

$$= \int \cos^2 \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} \operatorname{sen}^2 \frac{\phi}{2}\, d\phi = 2\int (1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\phi}{2})\operatorname{sen}^2 \frac{\phi}{2}\, d(\operatorname{sen}\frac{\phi}{2}) =$$

$$= 2\int \operatorname{sen}^2 \frac{\phi}{2}\, d(\operatorname{sen}\frac{\phi}{2}) - 2\int \operatorname{sen}^4 \frac{\phi}{2}\, d(\operatorname{sen}\frac{\phi}{2})$$

$$= \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3\frac{\phi}{2} - \frac{2\operatorname{sen}^5 \phi/2}{5} + C = \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3\frac{\phi}{2} - \frac{2}{5}\operatorname{sen}^5 \phi/2 + C$$

17. $\int \operatorname{sen}^3 mt + \cos^2 mt dt$ $\quad m = 2k + 1$, impar positivo

$$= \int \operatorname{sen}^2 mt \operatorname{sen} mt \cos^2 mt\, dt$$

$$= -\frac{1}{m}\int (1 - \cos^2 mt)\cos^2 mt\, d(\cos mt)$$

$$= -\frac{1}{m}\int \cos^2 mt\, d(\cos mt) + \frac{1}{m}\int \cos^4 mt\, d(\cos mt)$$

$$= -\frac{1}{3m}\cos^3 mt + \frac{1}{5m}\cos^5 mt + C$$

18. $\int \operatorname{sen}^5 nx dx =$

$m = 2k + 1$, impar positivo:

$$= \int \operatorname{sen}^4 nx \operatorname{sen} nx\, dx = -\frac{1}{n}\int (1 - \cos^2 nx)^2 d(\cos nx)$$

$$= -\frac{1}{n}\int (1 - 2\cos^2 nx + \cos^4 nx)\, d(\cos nx)$$

$$= -\frac{1}{n}\int d(\cos nx) + \frac{2}{n}\int \cos^2 nx\, d(\cos nx) - \frac{1}{n}\ \cos^4 nx\, d(\cos nx)$$

$$- \frac{1}{n}\int \cos^4 nx\, d(\cos nx)$$

$$= -\frac{1}{n}\cos nx + \frac{2}{3n}\cos^3 nx - \frac{1}{5n}\cos^5 nx + C$$

19. $\int \cos^3(a + bt)dt$

$n = 2k + 1$, impar positivo.

$$= \int \cos^2(a + bt)\cos(a + bt)dt$$

$$= \frac{1}{b}\int [1 - \operatorname{sen}^2(a + bt)]\, d(\operatorname{sen}(a + bt)) =$$

$$= \frac{1}{b}\int d(\operatorname{sen}(a + bt)) - \frac{1}{b}\int \operatorname{sen}^2(a + bt)\, d(\operatorname{sen}(a + bt))$$

$$= \frac{1}{b}\operatorname{sen}(a + bt) - \frac{1}{3b}\operatorname{sen}^3(a + bt) + C$$

20. $\int \frac{\operatorname{ctg}\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}\theta}}\, d\theta = \int \frac{\cos\theta/\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}^{1/2}\theta}\, d\theta = \int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^{3/2}\theta}\, d\theta$

$$= \int \operatorname{sen}^{-3/2}\theta \cos\theta\, d\theta$$

$u = \operatorname{sen}\theta \rightarrow du = \cos\theta\, d\theta$

$$= \int u^{-3/2}du = -2u^{-1/2} + C = -\frac{1}{2u^{1/2}} = -\frac{1}{2\operatorname{sen}^{1/2}\theta} + C$$

21. $\int \frac{sen^3 2x}{\sqrt[3]{cos 2x}}\,dx =$

$m = 2k + 1$ impar y positivo.

$$= \int \frac{sen^2 2x}{\sqrt{cos 2x}}\, sen\, 2x\, dx = \int \frac{(1 - cos^2 2x)}{cos^{1/3} 2x}\, sen 2x\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{d(cos\, 2x)}{cos^{1/3}(2x)} + \frac{1}{2}\int \frac{cos^2(2x)}{cos^{1/3}(2x)}\, d(cos 2x),$$

$$= -\frac{1}{2}\int cos^{-1/3}(2x)d(cos 2x) + \frac{1}{2}\int cos^{5/3}(2x)d(cos 2x)$$

$$= -\frac{3}{4}\, cos^{2/3}(2x) + \frac{3}{16}\, cos^{8/3}\,(2x) + C$$

2do Caso.
Integrales de la forma: $\int tg^m x dx$, $\int ctg^m x dx$

El 1er paso para proceder a la solución de este tipo de integrales es:

$$tg^m x = tg^{m-2} x\; tg^2 x = tg^{m-2} x(sec^2 x - 1)$$

$$ó \quad ctg^m x = ctg^{m-2} x\; ctg^2 x = ctg^{m-2} x(csc^2 x - 1)$$

3er Caso:

Integrales de la Forma: $\int sec^m x dx$ (ó $\int csc^m x dx$)

Si m es entero positivo par el 1er paso es escribir:

$$sec^m x = sec^{m-2}(x) sec^2 x = (tg^2 x + 1)^{m-2/2} sec^2 x$$

$$csc^m x = csc^{m-2} x\; csc^2 x = (ctg^2 x + 1)^{m-2/2} csc^2 x$$

4to Caso.
Integrales de la Forma.

$$\int tg^m x\; sec^n x dx \quad (ó \int ctg^m x\; csc^n x dx)$$

Cuando n es par se procede como en el 3er caso, cuando m es impar se procede como del siguiente modo:

$$\int tg^m x sec^n x dx = \int tg^{m-1} x sec^{n-1} x\; tgx\; secx\; dx$$

$$= \int (sec^2 x - 1)^{m-1/2} sec^{n-1} x\; secx\; tgx\; dx$$

$$= \int (sec^2 x - 1)^{m-1/2}\; sec^{n-1} x\; d(secx)$$

$$ó \quad \int ctg^m x csc^n x dx = -\int ctg^{m-1}(x) sec^{n-1} x\; ctgx\; cscx\; dx$$

$$= -\int (csc^2 x - 1)^{m-1/2}\; csc^{n-1} x\; d(cscx)$$

Demostrar las siguientes integraciones.

1. $\int tg^3 x\, dx = \frac{4}{2}\, tg^2 x + \ln\, cosx + C$

Solución.

$$= \int tg^2 x\; tgxdx = \int (sec^2 x - 1) tgx\, dx = \int sec^2 x\, tgx\, dx - \int tgx\, dx$$

$$= \int tgx\; sec^2 x dx - \int \frac{d(cosx)}{cosx} = \frac{tg^2 x}{2} + \ln|cosx| + C$$

2. $\int ctg^3 \frac{x}{3}\, dx = -\frac{3}{2}\, ctg^2 \frac{x}{3} - 3\, \ln|sen\, \frac{x}{3}| + C$

Solución.

$$= \int ctg^2 \frac{x}{3}\; ctg\, \frac{x}{3}\, dx = \int (csc^2 \frac{x}{3} - 1) ctg\, \frac{x}{3}\, dx$$

$$= \int csc^2 \frac{x}{3}\;\; ctg\, \frac{x}{3}\, dx - \int ctg\, \frac{x}{3}\, dx$$

I) $\int ctg\, \frac{x}{3}\; csc^2\, \frac{x}{3}\, dx$

Sea: $u = \operatorname{ctg}\frac{x}{3} \rightarrow -3\,du = \csc^2\frac{x}{3}$

$$-3\int u\,du = -\frac{3}{2}u^2 + C_1 = -\frac{3}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{x}{3} + C_1$$

II) $-\int \operatorname{ctg}\frac{x}{3}\,dx = -\int \frac{\cos x/3}{\operatorname{sen} x/3}\,dx = -3\int \frac{d(\operatorname{sen} x/3)}{\operatorname{sen} x/3}$

$$= -3\ln|\operatorname{sen} x/3| + C_2$$

De (I) y (II) se tiene:

$$\int \operatorname{ctg}^3\frac{x}{3}\,dx = -\frac{3}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{x}{3} - 3\ln|\operatorname{sen} x/3| + C$$

3. $\int \operatorname{ctg}^3 2x\csc 2x\,dx = \frac{1}{2}\csc 2x - \frac{1}{6}\csc^3 2x + C$

Solución.

m es impar positivo.

$$= \int \operatorname{ctg}^2 2x\operatorname{ctg} 2x\csc 2x\,dx = \int (\csc^2 2x - 1)\operatorname{ctg}2x\csc 2x\,dx$$

$$= \int \csc^2 2x\operatorname{ctg} 2x\csc 2x\,dx - \int \operatorname{ctg} 2x\csc 2x\,dx = -$$

$$= -\frac{1}{2}\int \csc^2 2x\,d(\csc 2x) + \frac{1}{2}\int d(\csc 2x)$$

$$= \frac{1}{2}\csc 2x - \frac{1}{6}\csc^3 2x + C$$

4. $\int \csc^4\frac{x}{4}\,dx = -\frac{4}{3}\operatorname{ctg}^3\frac{x}{4} - 4\operatorname{ctg}\frac{x}{4} + C$

Solución.

$$= \int \csc^2\frac{x}{4}\csc^2\frac{x}{4}\,dx = \int (\operatorname{ctg}^2\frac{x}{4} + 1)\csc^2\frac{x}{4}\,dx$$

$$= \int \operatorname{ctg}^2\frac{x}{4}\csc^2\frac{x}{4}\,dx + \int \csc^2\frac{x}{4}\,dx$$

$$= 4\int \operatorname{ctg}^2\frac{x}{4}\,d(\operatorname{ctg}\frac{x}{4}) + 4\int \csc^2\frac{x}{4}\,d(\frac{x}{4})$$

$$= \frac{4}{3}\operatorname{ctg}^3\frac{x}{4} - 4\operatorname{ctg}\frac{x}{4} + C$$

5. $\int \operatorname{tg}^5 3\theta\,d\theta = \frac{1}{12}\operatorname{tg}^4 3\theta - \frac{1}{6}\operatorname{tg}^2 3\theta + \frac{1}{3}\ln|\sec 3\theta| + C$

Solución.

$$= \int \operatorname{tg}^3 3\theta\operatorname{tg}^2 3\theta\,d\theta = \int (\sec^2 3\theta - 1)\operatorname{tg}^3 3\theta\,d\theta$$

$$= \int \operatorname{tg}^3 3\theta\sec^2 3\theta\,d\theta - \int \operatorname{tg}^3 3\theta\,d\theta$$

I) $\int \operatorname{tg}^3 3\theta\sec^2 3\theta\,d\theta = \frac{1}{3}\int \operatorname{tg}^3 3\theta\,d(\operatorname{tg} 3\theta) = \frac{1}{12}\operatorname{tg}^4 3\theta + C_1$

II) $-\int \operatorname{tg}^3 3\theta\,d\theta = -\int \operatorname{tg}^2 3\theta.\operatorname{tg}3\theta\,d\theta =$

$$= -\int (\sec^2 3\theta - 1)\operatorname{tg}3\theta\,d\theta = -\int \sec^2 3\theta\operatorname{tg}3\theta\,d\theta + \int \operatorname{tg}3\theta\,d\theta$$

$$= -\frac{1}{3}\int \operatorname{tg}3\theta\,d(\operatorname{tg}3\theta) - \frac{1}{3}\int \frac{d(\cos 3\theta)}{\cos 3\theta}$$

$$= -\frac{1}{6}\operatorname{tg}^2 3\theta + \frac{1}{3}\ln|\sec 3\theta| + C_2$$

$\therefore$ de (I); (II) se tiene:

$$\int \operatorname{tag}^5 3\theta\,d\theta = \frac{1}{12}\operatorname{tg}^4 3\theta - \frac{1}{6}\operatorname{tg}^2 3\theta + \frac{1}{3}\ln|\sec 3\theta| + C$$

6. $\int \frac{\operatorname{sen}^2\phi\,d\phi}{\cos^4\phi} = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\phi + C$

Solución.

$$= \int \operatorname{tg}^2\phi\sec^2\phi\,d\theta = \int \operatorname{tg}^2\phi\,d(\operatorname{tg}\phi) = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\phi + C$$

7. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 2x\cos^4 2x} = \operatorname{tg}2x + \frac{1}{6}\operatorname{tg}^3 2x - \frac{1}{2}\operatorname{ctg} 2x + C$

Solución.

Se sabe que $sen^2x + cos^2x = 1$

$$\int\frac{(sen^2 2x + cos^2 2x)dx}{sen^2 2x\ cos^4 2x} = \int\frac{dx}{cos^4 2x} + \int\frac{dx}{sen^2 2x\ cos^2 2x}$$

$$= \int sec^4 2xdx + \int csc^2 2x\ sec^2 2xdx$$

I) $\int sec^4 2xdx = \int(tg^2 2x + 1)sec^2 2xdx$

$$= \int tg^2 2x\ sec^2 2xdx + \int sec^2 2xdx$$

$$= \frac{1}{2}\int tg^2 2xd(tg\ 2x) + \frac{1}{2}\int sec^2 2xd(2x) = \frac{1}{6}\ tg^3 2x + \frac{1}{2}tg 2x + C_1$$

II) $\int csc^2 2xsec^2 2xdx = \int csc^2 2x(tg^2 2x + 1)dx$

$$= \int csc^2 2x\ tg^2 2xdx + \int csc^2 2xdx$$

$$= \int\frac{sen^2 2xdx}{sen^2 2xcos^2 2x} + \int csc^2 2xdx =$$

$$= \frac{1}{2}\int sec^2 2xd(2x) + \frac{1}{2}\int csc^2 2xd(2x)$$

$$= \frac{1}{2}\ tg\ 2x - \frac{1}{2}\ ctg\ 2x + C_1$$

de la solución de (I) y (II) se tiene:

$$\int\frac{dx}{sen^2 2xcos^4 2x} = \frac{1}{6}\ tg^3\ 2x + \frac{1}{2}\ tg 2x + \frac{1}{2}tg 2x - \frac{1}{2}\ ctg 2x + C$$

8. $\displaystyle\int\frac{cos^4xdx}{sen^6x} = -\frac{1}{5}\ ctg^5x + C$

Solución.

$$= \int\frac{cos^4x}{sen^4x}\cdot\frac{1}{sen^2x}\ dx = \int ctg^4x\ csc^2xdx =$$

$$= -\int ctg^4xd(ctgx) = -\frac{1}{5}\ ctg^5x + C$$

9. $\displaystyle\int\frac{sen^{3/2}x\ dx}{cos^{1\ 1/2}x} = \frac{2}{5}\ tg^{5/2}x + \frac{2}{9}\ tg^{9/2}x + C$

Solución.

$$\int\frac{sen^{3/2}x}{cos^{3/2}x}\cdot\frac{1}{cos^{8/2}x}\ dx = \int tg^{3/2}x\ sec^{8/2}xdx =$$

$$= \int tg^{3/2}(x)\ sec^2x(tg^2x + 1)dx$$

$$= \int tg^{7/2}x\ sec^2xdx + \int tg^{3/2}x\ sec^2x\ dx$$

$$= \int tg^{7/2}xd(tgx) + \int tg^{3/2}xd(tg\ \frac{x}{2})$$

$$= \frac{2}{9}\ tg^{9/2}x + \frac{2}{5}\ tg^{5/2}x + C$$

10. $\displaystyle\int tg^3\alpha\ sec^{5/2}\alpha d\alpha = \frac{2}{9}\ sec^{9/2}\alpha - \frac{2}{5}\ sec^{5/2}\alpha + C$

Solución.

$$= \int tg^2\alpha sec^{3/2}\alpha tg\alpha\ sec\alpha d\alpha = \int(sec^2\alpha - 1)sec^{3/2}\alpha tg\alpha sec\alpha d\alpha$$

$$= \int sec^{7/2}\alpha d(sec\alpha) - \int sec^{3/2}\alpha d(sec\alpha) = \frac{2}{9}sec^{9/2}\alpha - \frac{2}{5}sec^{5/2}\alpha + C$$

11. $\displaystyle\int(\frac{secax}{tgax})^4dx = -\frac{1}{a}(ctgax + \frac{1}{3}\ ctg^3ax) + C$

Solución.

$$= \int\left(\frac{1/cosax}{\frac{senax}{cosax}}\right)^2dx = \int(\frac{1}{senax})^4dx = \int csc^4axdx$$

$$= \int csc^2ax.csc^2axdx = \int (ctg^2ax + 1)csc^2axdx$$

$$= \int ctg^2axcsc^2ax\,dx + \int csc^2axdx$$

$$= -\frac{1}{a}\int ctg^2axd(ctgax) + \frac{1}{a}\int csc^2axd(ax)$$

$$= -\frac{1}{3a}ctg^3ax - \frac{1}{a}ctg\ ax + C$$

factorizando se tiene:

$$-\frac{1}{a}\left(\frac{1}{3}ctg^3ax + ctgax\right) + C$$

12. $\int (ctg^2 2\theta + ctg^4 2\theta)d\theta = -\frac{1}{6}ctg^3 2\theta + C$

Solución.

$$= \int ctg^2 2\theta(1 + ctg^2 2\theta)d\theta = \int ctg^2\ 2\theta csc^2 2\theta d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\int ctg^2 2\theta d(ctg2\theta)$$

$$= -\frac{1}{6}ctg^3 2\theta + C$$

13. $\int (tgbt - ctgbt)^3dt = \frac{1}{2b}(tg^2bt + ctg^2bt) + \frac{4}{b}\ln sen2bt + C$

Solución.

$$= \int (tg^3bt - 3\ tg^2bt\ ctgbt + 3tgbt\ ctg^2bt - ctg^3bt)dt$$

$$= \int tg^3bt\ dt - 3\int tg\ btdt + 3\int ctg\ btdt - \int ctg^3btdt$$

I) $\int tg^3btdt = \int tg^2bt\ tgbtdt = \int (sec^2bt - 1)tgbtdt$

$$= \int tg\ btsec^2btdt - \int tgbtdt$$

$$= \frac{1}{b}\int tg\ btd(tg\ bt) + \frac{1}{b}\int \frac{d(cosbt)}{cosbt} = \frac{1}{2b}tg^2bt +$$

$$+ \frac{1}{b}\ln|cosbt| + C_1$$

II. $-\frac{3}{b}\int tg\ bt\ dt = +\frac{3}{b}\int \frac{d(cosbt)}{cosbt} = \frac{3}{b}\ln|cosbt| + C_2$

III. $3\int ctg\ btdt = 3\int \frac{cosbt}{senbt}dt = \frac{3}{b}\int \frac{d(senbt)}{senbt} =$

$$= \frac{3}{b}\ln|senbt| + C_3$$

IV) $-\int ctg^3btdt = -\int ctg^2btctgbtdt = -\int (csc^2bt-1)ctgbtdt$

$$= -\int ctgbt\ csc^2btdt - \int ctgbtdt$$

$$= \frac{1}{b}\int ctgbtd(ctgbt) + \frac{1}{b}\int \frac{d(senbt)}{senbt} = \frac{1}{2b}ctg^2bt +$$

$$+ \frac{1}{b}\ln|senbt| + C_4$$

de las soluciones de (I), (II), (III) y (IV) se tiene:

$$\int (tgbt - ctgbt)^3 = \frac{1}{2b}tg^2bt + \frac{1}{b}\ln|cosbt| + \frac{3}{b}\ln|cosbt| +$$

$$+ \frac{3}{b}\ln|senbt| + \frac{1}{2b}ctg^2bt + \frac{1}{b}\ln|senbt| + C$$

factorizando y sumando términos semejantes se tiene:

$$= \frac{1}{2b}(tg^2bt + ctg^2bt) + \frac{4}{b}(\ln|cosbt| + \ln|senbt|) + C$$

$$= \frac{1}{2b}(tg^2bt + ctg^2bt) + \frac{4}{b}\ln|senbt.cosbt| + C$$

Hallar el valor de c/u de las siguientes integrales y comprobar los resultados por diferenciación (la comprobación queda como ejercicio para ud.)

14. $\int ctg^5 ax dx = \int ctg^3 ax\, ctg^2 ax dx = \int ctg^3 ax(csc^2 ax - 1)dx$

$$= \int ctg^3 ax csc^2 ax dx - \int ctg^3 ax dx$$

I. $\int ctg^3 ax csc^2 ax dx = -\frac{1}{a}\int ctg^3 ax d(ctg ax) = -\frac{1}{4a} ctg^4 ax + C_1$

II. $-\int ctg^3 ax = -\int ctg^2 ax ctg ax dx = -\int (csc^2 ax - 1) ctg ax dx$

$$= -\int ctg ax csc^2 ax dx + \int ctg ax dx$$

$$\frac{1}{a} \int ctg ax d(ctg ax) + \frac{1}{a}\int \frac{d(sen ax)}{sen ax} = \frac{1}{2a} ctg^2 ax + \frac{1}{a} \ln|sen ax| + C_2$$

De la solución de (I) y (II) se tiene:

$$\int ctg^5 ax dx = -\frac{1}{4a} ctg^4 ax + \frac{1}{2a} ctg^2 ax + \frac{1}{a} \ln|sen ax| + C$$

15. $\int sec^6\theta d\theta = \int sec^4\theta sec^2\theta d\theta = \int (tg^2\theta + 1)^2 sec^2\theta d\theta$

$$= \int (tg^4\theta + 2 tg^2\theta + 1) sec^2\theta d\theta$$

$$\int tg^4\theta d(tg\theta) + 2\int tg^2\theta d(tg\theta) + \int d(tg\theta) =$$

$$= \frac{1}{5} tg^5\theta + \frac{2}{3} tg^3\theta + tg\theta + C$$

16. $\int csc^6 \frac{x}{2} dx = \int csc^4\frac{x}{2} csc^2 \frac{x}{2} dx = \int (ctg^2\frac{x}{2} + 1)^2 csc^2\frac{x}{2} dx$

$$= \int (ctg^4\frac{x}{2} + 2ctg^2\frac{x}{2} + 1) csc^2\frac{x}{2} dx$$

$$= -2\int ctg^4\frac{x}{2} d(ctg\frac{x}{2}) - 2\int ctg^2\frac{x}{2} d(ctg \frac{x}{2}) - 2\int d(ctg\frac{x}{2})$$

$$= -\frac{2}{5} ctg^5\frac{x}{2} - \frac{2}{3} ctg^3\frac{x}{2} - 2 ctg\frac{x}{2} + C$$

17. $\int \frac{sec^4 t dt}{tg^3 t} = \int \frac{(tg^2 t + 1)}{tg^3 t} sec^2 t dt = \int\frac{sec^2 t dt}{tg t} + \int \frac{sec^2 t dt}{tg^3 t}$

$$= \int \frac{d(tg t)}{tg t} + \int tg^{-3} t d(tg t)$$

$$= \ln|tg t| - \frac{1}{2} tg^{-2} t + C = \ln|tg t| = \frac{1}{2tg^2 t} + C$$

18. $\int\frac{sec^4 x dx}{\sqrt{tg x}} = \int \frac{(tg^2 x + 1)}{tg^{1/2} x} sec^2 x dx$

$$= \int tg^{3/2} x sec^2 x dx + \int tg^{-1/2} x sec^2 x dx$$

$$= \int tg^{3/2} x d(tg x) + \int tg^{-1/2} x d(tg x) = \frac{2}{5} tg^{5/2} x + 2tg^{1/2} x + C$$

19. $\int (\frac{csc ax}{ctg ax})^4 dx = \int (\frac{1/sen ax}{cos ax/sen ax})^4 dx = \int sec^4 ax dx = \int (tg^2 ax + 1) sec^2 ax dx$

$$= \frac{1}{a}\int tg^2 ax d(tg ax) + \frac{1}{a}\int d(tg ax) = \frac{1}{3a} tg^3 ax + \frac{1}{a} tg ax + C$$

20. $\int tg^3\frac{x}{3} sec^3\frac{x}{3} dx = \int tg^2\frac{x}{3} sec^2\frac{x}{3} tg\frac{x}{3} sec\frac{x}{3} dx$

$$= \int (sec^2\frac{x}{3} - 1) sec^2\frac{x}{3} tg\frac{x}{3} sec\frac{x}{3} dx$$

$$= 3\int sec^4\frac{x}{3} d(sec\frac{x}{3}) - 3\int sec^2\frac{x}{3} d(sec\frac{x}{3}) = \frac{3}{5} sec^5\frac{x}{3} - sec^3\frac{x}{3} + C$$

21. $\int \frac{dx}{sen^4 3x cos^2 3x} = \int\frac{(sen^2 3x + cos^2 3x)dx}{sen^4 3x cos^2 3x} = \int \frac{dx}{sen^2 3x cos^2 3x} + \int \frac{dx}{sen^4 3x}$

$$= \int \csc^2 3x \sec^2 3x + \int \csc^4 3x dx = \int (ctg^2 3x + 1)\sec^2 3x dx$$

$$+ \int (ctg^2 3x + 1)\csc^2 3x dx$$

$$= \int ctg^2 3x \sec^2 3x dx + \int \sec^2 3x + \int ctg^2 3x \csc^2 3x dx + \int \csc^2 3x dx$$

$$= \int \csc^2 3x dx + \int \sec^2 3x dx + \int ctg^2 3x \csc^2 3x dx + \int \csc^2 3x dx$$

$$= 2 \int \csc^2 3x dx + \int \sec^2 3x\, dx + \int ctg^2 3x \csc^2 3x dx$$

$$= -\frac{2}{3} \int d(ctg 3x) + \frac{1}{3} \int d(tg 3x) - \frac{1}{3} \int ctg^2 3x d(ctg 3x)$$

$$= -\frac{2}{3} ctg\ 3x + \frac{1}{3} tg\ 3x - \frac{1}{9} ctg^3 3x + C$$

22. $\int (\frac{\csc bx}{tgbx})^2 dx = \int (\csc bx \frac{\cos bx}{sen bx})^2\ dx = \int \csc^2 bx ctg^2 bx dx$

Sea $u = ctg\ bx \rightarrow -\frac{du}{b} = \csc^2 bx dx$

$$\therefore \int u^2 (-\frac{du}{b}) = -\frac{1}{b} \int u^2 du = -\frac{1}{3b} u^3 + C =$$

$$= -\frac{1}{3b} ctg^3 bx + C$$

23. $\int (\frac{tg\phi}{ctg\phi})^3 \phi = \int tg^6 \phi d\phi = \int tg^4 \phi (\sec^2 \phi - 1) d\phi$

$$= \int tg^4 \phi \sec^2 \phi d\phi - \int tg^4 \phi d\phi =$$

I) $\int tg^4 \phi \sec^2 \phi d\phi = \int tg^4 \phi d(tg\phi) = \frac{1}{5} tg^5 \phi + C_1$

II) $-\int tg^4 \phi d\phi = -\int tg^2 \phi (\sec^2 \phi - 1) d\phi = -\int tg^2 \phi \sec^2 \phi d\phi +$

$$+ \int tg^2 \phi d\phi$$

$$= -\int tg^2 \phi d(tg\phi) + \int \sec^2 \phi d\phi - \int d\phi = -\frac{1}{3} tg^3 \phi + tg\phi - \phi + C_2$$

de la solución de (I) y (II) se tiene:

$$\int (\frac{tg\phi}{ctg\phi})^3 d\phi = \frac{1}{3} tg^5 \phi - \frac{1}{3} tg^3 \phi + tg\phi - \phi + C$$

24. $\int (\frac{tgat}{\cos at})^4 dt = \int tg^4 at \sec^4 at dt = \int tg^4 at (tg^2 at + 1) \sec^2 at dt$

$$= \int tg^6 at \sec^2 at dt + \int tg^4 at \sec^2 at dt =$$

$$= \frac{1}{a} \int tg^6 at d(tg\ at) + \frac{1}{a} \int tg^4 at d(tg\ at)$$

$$= \frac{1}{7a} tg^7 at + \frac{1}{5a} tg^5 at + C$$

25. $\int \frac{tg^3 x dx}{\sqrt{\sec x}} = \int tgx \frac{(\sec^2 x - 1)}{\sec^{1/2} x} dx = \int tgx \sec^{3/2} x dx - \int \frac{tgx dx}{\sec^{1/2} x}$

$$= \int \sec^{1/2} x\ tgx\ \sec x dx - \int \cos^{-1/2} sen x dx$$

$$= \int \sec^{1/2} x d(\sec x) + \int \cos^{-1/2} x d(\cos x) = \frac{2}{3} \sec^{3/2} x + 2\cos^{1/2} x + C$$

26. $\int tg^n x \sec^4 x dx = \int tg^n x \sec^2 x (tg^2 x + 1) dx$

$$= \int tg^{n+2} x \sec^2 x + \int tg^n x \sec^2 x dx$$

$$= \int tg^{n+2} x d(tgx) + \int tg^n d(tgx) = \frac{1}{n+3} tg^{n+3} x + \frac{1}{n+1} tg^{n+1} x + C$$

27. $\int \frac{tg^5 2\theta}{\sec^3 2\theta} d\theta = \int \frac{tg^3 2\theta (\sec^2 2\theta - 1) d\theta}{\sec^3 2\theta} =$

$$= \int \frac{tg^3 2\theta}{\sec 2\theta}\, d\theta - \int \frac{tg^3 2\theta}{\sec^3 2\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{tg 2\theta(\sec^2 2\theta - 1)}{\sec 2\theta}\, d\theta - \quad sen^3 2\theta d\theta$$

$$= \int tg 2\theta \sec 2\theta d\theta - \int \cos 2\theta d\theta - \int sen^3 2\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int tg 2\theta \sec 2\theta d(2\theta) - \frac{1}{2}\int \cos 2\theta d(2\theta) - \frac{1}{2}\int sen 2\theta d(2\theta)$$

$$- \frac{1}{2}\int \cos^2 2\theta d(\cos 2\theta)$$

$$= \frac{1}{2}\sec 2\theta - \frac{1}{2} sen\ 2\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta - \frac{1}{6}\cos^3 2\theta + C$$

5to CASO:

CALCULO DE INTEGRALES DE LA FORMA

$$\int sen^m u \cos^n u du$$

a) Cuando m, ó n son números impares y positivos, se resuelve como el 1er caso.

b) Cuando m y n son números pares y positivos, se transforma valiéndose de las siguientes identidades trigonométricas.

$$sen\ u \cos u = \frac{1}{2} sen\ 2u$$

$$sen^2 u = \frac{1}{2}(1 - \cos 2u)$$

$$\cos^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos 2u)$$

6to CASO:

INTEGRALES DE LA FORMA

$$\int sen\ mx \cos nx\, dx; \quad \int sen\ mx\ sen\ nx\, dx\ ; \int \cos mx \cos nx\, dx$$

para $m \neq n$, se utiliza las siguientes identidades trigonométricas.

$$sen\ mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[sen(m + n)x + sen(m-n)x\right]$$

$$sen\ mx\ sen\ nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right]$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m - n)x + \cos(m + n)x\right]$$

Demostrar las siguientes integraciones.

1. $\int sen^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{sen\ 2x}{4} + C$

Solución.

$$= \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx$$

$$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{4}\int \cos 2x d(2x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} sen\ 2x + C$$

2. $\int sen^4 x dx = \frac{3}{8}x - \frac{sen\ 2x}{4} + \frac{sen\ 4x}{32} + C$

Solución.

$$= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int \cos 2x d(2x) + \frac{1}{4}\int \left(\frac{1 + \cos 4x}{2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int \cos 2x d(2x) + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{32}\int \cos 4x d(4x)$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{1}{4} sen\ 2x + \frac{x}{8} + \frac{1}{32} sen 4x = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4} sen 2x + \frac{1}{32} sen 4x + C$$

3. $\int \cos^4 x\, dx = \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{32} \operatorname{sen} 4x + C$

Solución :

3. $\int \cos^4 x dx = \frac{1}{4} \int (1 + \cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x\, dx$

$$+ \frac{1}{4} \int \cos^2 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{4} \int \cos 2x d(2x) + \frac{1}{8} \int dx + \frac{1}{32} \int \cos 4x d(4x)$$

$$= \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} \operatorname{sen} 4x + C$$

4. $\int \operatorname{sen}^6 x dx = \frac{5x}{16} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{48} + \frac{3 \operatorname{sen} 4x}{64} + C$

Solución.

$$= \int \frac{1}{8} (1 - \cos 2x)^3 dx = \frac{1}{8} \int dx - \frac{3}{8} \int \cos 2x + \frac{3}{8} \int \cos^2 2x dx$$

$$- \frac{1}{8} \int \cos^3 2x dx$$

teniendo en cuenta que.

$\cos^2 2x = \frac{1}{2} (1 + \cos 4x)$ tenemos:

$$= \frac{1}{8} \int dx - \frac{3}{16} \int \cos 2x d(2x) + \frac{3}{16} \int dx + \frac{3}{64} \int \cos 4x d(4x) -$$

$$- \frac{1}{8} \int \cos 2x (1 - \operatorname{sen}^2 2x) dx$$

$$= \frac{1}{8} \int dx - \frac{3}{16} \int \cos 2x d(2x) + \frac{3}{16} \int dx + \frac{3}{64} \int \cos 4x d(4x) +$$

$$+ \frac{1}{16} \int \operatorname{sen}^2 2x d(\operatorname{sen} 2x) - \frac{1}{16} \int \cos 2x d(2x)$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{3}{16} \operatorname{sen} 2x + \frac{3x}{16} + \frac{3}{64} \operatorname{sen} 4x + \frac{1}{48} \operatorname{sen}^3 2x - \frac{1}{16} \operatorname{sen} 2x$$

$$= \frac{5}{16} x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{48} \operatorname{sen}^3 2x + \frac{3}{64} \operatorname{sen} 4x + C$$

5. $\int \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} dx = \frac{x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{16} + C$

Solución.

$$= \int \frac{1}{4} (1 - \cos \frac{2x}{2})(1 + \cos \frac{2x}{2}) dx = \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{4} \int \cos^2 x dx$$

$$= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{8} \int (1 + \cos 2x) dx$$

$$= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{8} \int dx + \frac{1}{16} \int \cos 2x d(2x) = \frac{x}{4} - \frac{x}{8} + \frac{1}{16} \operatorname{sen} 2x + C$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{1}{16} \operatorname{sen} 2x + C$$

6. $\int \operatorname{sen}^2 2x . \cos^4 2x dx = \frac{x}{16} + \frac{\operatorname{sen}^3 4x}{96} - \frac{\operatorname{sen} 8x}{128} + C$

Solución.

$$= \int \frac{1}{8} (1 - \cos 4x)(1 + \cos 4x)^2 dx = \frac{1}{8} \int (1 + \cos 4x -$$

$$- \cos^2 4x - \cos^3 4x) dx$$

$$= \frac{1}{8} \int dx + \frac{1}{32} \int \cos 4x d(4x) - \frac{1}{16} \int (1 + \cos 8x) dx -$$

$$- \frac{1}{8} \int \cos 4x (1 - \operatorname{sen}^2 4x) dx$$

$$= \frac{1}{8} \int dx + \frac{1}{32} \int \cos 4x d(4x) - \frac{1}{16} \int dx - \frac{1}{128} \int \cos 8x d(8x) -$$

$$- \frac{1}{32} \int \cos 4x d(4x) + \frac{1}{32} \int \operatorname{sen}^2 4x \cos 4x dx$$

$$= \frac{x}{8} + \frac{1}{32} \operatorname{sen} 4x - \frac{x}{16} - \frac{1}{128} \cos 8x - \frac{1}{32} \operatorname{sen} 4x + \frac{1}{96} \operatorname{sen}^3 4x + C$$

$$= \frac{x}{16} - \frac{1}{128} \cos 8x + \frac{1}{96} \operatorname{sen}^3 4x + C$$

7. $\int(2-\cos\theta)^2 d\theta = \frac{9}{2}\theta - 4\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen}2\theta + C$

Solución :

$$= \int d\theta - 4\int\cos\theta\, d\theta + \int\cos^2\theta d\theta = 4\int d\theta - 4\int\cos\theta d\theta$$

$$+ \frac{1}{2}\int(1 + \cos2\theta)d\theta$$

$$= 4\int d\theta - 4\int\cos\theta d\theta + \frac{1}{2}\int d\theta + \frac{1}{4}\int\cos2\theta d(2\theta)$$

$$= 4\theta - 4\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen}2\theta + C$$

$$= \frac{9}{2}\theta - 4\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen}2\theta + C$$

8. $\int(\operatorname{sen}^2\phi + \cos\phi)^2 d\phi = \frac{7\phi}{8} + \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3\phi + \frac{\operatorname{sen}4\phi}{32} + C$

Solución.

$$= \int\operatorname{sen}^4\phi d\phi + 2\int\operatorname{sen}^2\phi\cos\phi\, d\phi + \int\cos^2\phi d\phi =$$

$$= \frac{1}{4}\int(1 - \cos2\phi)^2 d\phi + 2\int\operatorname{sen}^2\phi d(\operatorname{sen}\phi) + \frac{1}{2}\int(1+\cos2\phi)d\phi$$

$$= \frac{1}{4}\int d\phi - \frac{1}{2}\int\cos2\phi d\phi + \frac{1}{4}\int\cos^2 2\phi d\phi + 2\int\operatorname{sen}^2\phi d(\operatorname{sen}\phi) +$$

$$+ \frac{1}{2}\int d\phi + \frac{1}{2}\int\cos2\phi d\phi$$

$$= \frac{1}{4}\int d\phi - \frac{1}{4}\int\cos2\phi d(2\phi) + \frac{1}{8}\int(1 + \cos4\phi)d\phi$$

$$+ 2\int\operatorname{sen}^2\phi d(\operatorname{sen}\phi) + \frac{1}{2}\int d\phi + \frac{1}{4}\int\cos2\phi d(2\phi)$$

$$= \frac{1}{4}\int d\phi - \frac{1}{4}\int\cos2\phi d(2\phi) + \frac{1}{8}\int d\phi + \frac{1}{32}\int\cos4\phi d(4\phi) +$$

$$+ 2\int\operatorname{sen}^2\phi d(\operatorname{sen}\phi) + \frac{1}{2}\int d\phi + \frac{1}{4}\int\cos2\phi d(2\phi)$$

$$= \frac{\phi}{4} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}2\phi + \frac{1\phi}{8} + \frac{1}{32}\operatorname{sen}4\phi + \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3\phi + \frac{1}{2}\phi + \frac{1}{4}\operatorname{sen}2\phi + C$$

$$= \frac{7}{8}\phi + \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3\phi + \frac{1}{32}\operatorname{sen}4\phi + C$$

9. $\int\operatorname{sen}2x\cos4x dx = \frac{\cos2x}{4} - \frac{\cos6x}{12} + C$

Solución.

$$= \frac{1}{2}\int[\operatorname{sen}(2 + 4)x + \operatorname{sen}(2 - 4)x]dx = \frac{1}{2}\int\operatorname{sen}6x dx -$$

$$- \frac{1}{2}\int\operatorname{sen}(2x)dx$$

$$= \frac{1}{12}\int\operatorname{sen}6x d(6x) - \frac{1}{4}\int\operatorname{sen}2x d(2x) = -\frac{1}{12}\cos6x + \frac{1}{4}\cos2x + C$$

10. $\int\operatorname{sen}3x\operatorname{sen}2x dx = \frac{\operatorname{sen}x}{2} - \frac{\operatorname{sen}5x}{10} + C$

Solución.

$$= \frac{1}{2}\int[\cos(3 - 2)x - \cos(3 + 2)x]dx = \frac{1}{2}\int\cos x dx -$$

$$- \frac{1}{2}\int\cos5x dx$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen}x - \frac{1}{10}\operatorname{sen}5x + C$$

11. $\int\cos4x\cos3x dx = \frac{\operatorname{sen}x}{2} + \frac{\operatorname{sen}7x}{14} + C$

Solución.

$$= \frac{1}{2}\int[\cos(4 - 3)x + \cos(4 + 3)x]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\cos x dx + \frac{1}{2}\int\cos7x dx$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen}x + \frac{1}{14}\operatorname{sen}7x + C$$

Hallar el valor de c/u de las siguientes integrales (La comprobación comc ejercicio para Ud.)

12. $$\int \cos^4 x dx = \frac{1}{4}\int (1+\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + $$
$$+ \frac{1}{4}\int \cos^2 2x dx$$
$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{4}\int \cos 2x d(2x) + \frac{1}{8}\int (1+\cos 4x)dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{4}\int \cos 2x d(2x) + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{32}\int \cos 4x d(4x)$$
$$= \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{x}{8} + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C$$
$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C$$

12. $$\int \cos^4 ax dx = \frac{1}{4}\int (1+\cos 2ax)^2 dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{4}\int 2\cos 2ax + \frac{1}{4}\int \cos^2 2ax.$$
$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{4a}\int \cos 2ax d(2ax) + \frac{1}{8}\int (1+\cos 4ax)dx$$
$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{4a}\int \cos 2ax d(2ax) + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{32a}\int \cos 4ax d(4ax)$$
$$= \frac{x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a} + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32a}\operatorname{sen} 4ax + C.$$

13. $$\int \operatorname{sen}^2 ax \cos^2 ax dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos 2ax)(1+\cos 2ax)dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 2ax)dx$$
$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{8}\int (1+\cos 4ax)dx$$

$$= \frac{1}{4} dx - \frac{1}{8} dx - \frac{1}{32a}\int \cos 4ax d(4ax)$$
$$= \frac{x}{4} - \frac{x}{8} - \frac{1}{32a}\operatorname{sen} 4ax + C$$

14. $$\int \operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{2}\cos^2 \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{1}{8}\int \left(1 - \cos 2\frac{\theta}{2}\right)^2\left(1 + \cos 2\frac{\theta}{2}\right)d\theta$$
$$= \frac{1}{8}\int (1 - \cos\theta - \cos^2\theta + \cos^3\theta)d\theta$$
$$= \frac{1}{8}\int d\theta - \frac{1}{8}\int \cos\theta - \frac{1}{8}\int \cos\theta d\theta - \frac{1}{8}\int \cos^2\theta d\theta + \frac{1}{8}$$
$$= \frac{1}{8}\int d\theta - \frac{1}{8}\int \cos\theta - \frac{1}{16}\int (1+\cos 2\theta)d\theta +$$
$$+ \frac{1}{8}\int \cos\theta(1 - \operatorname{sen}^2\theta)d\theta$$
$$= \frac{1}{8}\int d\theta - \frac{1}{8}\int \cos\theta - \frac{1}{16}\int d\theta - \frac{1}{32}\int \cos 2\theta d(2\theta) +$$
$$+ \frac{1}{8}\int \cos\theta d\theta - \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2\theta d(\operatorname{sen}\theta)$$
$$= \frac{\theta}{8} - \frac{1}{8}\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{16}\theta - \frac{1}{32}\operatorname{sen} 2\theta + \frac{1}{8}\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{24}\operatorname{sen}^3\theta + C$$
$$= \frac{\theta}{16} - \frac{1}{32}\operatorname{sen} 2\theta - \frac{1}{24}\operatorname{sen}^3\theta + C$$

15. $$\int \operatorname{sen}^4\alpha \cos^4\alpha d\alpha = \frac{1}{16}\int \operatorname{sen}^4 2\alpha d\alpha = \frac{1}{64}\int (1-\cos 4\alpha)^2 d\alpha$$
$$= \frac{1}{64}\int d\alpha - \frac{1}{32}\int \cos 4\alpha d\alpha + \frac{1}{64}\int \cos^2 4\alpha d\alpha$$

I) $$\frac{1}{64}\int d\alpha - \frac{1}{128}\int \cos 4\alpha d(4\alpha) = \frac{1}{64}\alpha - \frac{1}{128}\operatorname{sen} 4\alpha + C_1$$

II) $\frac{1}{64}\int \cos^2 4\alpha d\alpha = \frac{1}{128}\int (1 + \cos 8\alpha)d\alpha$

$$= \frac{1}{128}\int d\alpha + \frac{1}{1024}\int \cos 8\alpha d(8\alpha)$$

$$= \frac{\alpha}{128} + \frac{1}{1024}\operatorname{sen} 8\alpha + C_2$$

de la solución de (I), (II) se tiene:

$$\int \operatorname{sen}^4 \alpha \cos^4 \alpha d\alpha = \frac{3}{128}\alpha - \frac{1}{128}\operatorname{sen} 4\alpha + \frac{1}{1024}\operatorname{sen} 8\alpha + C$$

16. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^6 x dx = \frac{1}{4}\int \operatorname{sen}^2 2x \cos^4 x dx =$

$$= \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x(1 + \cos 2x)^2 dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x \, dx + \frac{1}{4}\int \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x \, dx + \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x \cos^2 2x dx$$

I) $\frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x \, dx = \frac{1}{16}\int (1 - \cos 4x)dx = \frac{1}{16}\int dx - \frac{1}{64}\int \cos 4x d(4x)$

$$= \frac{x}{16} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{64} + C_1$$

II) $\frac{1}{4}\int \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x dx = \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x d(\operatorname{sen} 2x) = \frac{1}{24}\operatorname{sen}^3 2x + C_2$

III) $\frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x \cos^2 2x dx = \frac{1}{8}\left(\frac{x}{8} - \frac{1}{64}\operatorname{sen} 8x\right) + C_2$

Por Ejercicio 13.

∴ de la solución de (I), (II), (III) se tiene:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^6 x dx = \frac{5x}{64} \quad \frac{\operatorname{sen} 4x}{64} - \frac{1}{512}\operatorname{sen} 8x + \frac{1}{24}\operatorname{sen}^3 2x + C$$

17. $\int (1 + \cos x)^3 dx = \int (1 + 3\cos x + 3\cos^2 x + \cos^3 x)dx$

$$= \int dx + 3\int \cos x dx + 3\int \cos^2 x dx + \int \cos^3 x dx$$

I) $\int dx + 3\int \cos x dx = x + 3 \operatorname{sen} x + C_1$

II) $3\int \cos^2 x dx + \int \cos^3 x dx = \frac{3}{2}\int (1 + \cos 2x)dx$

$$+ \int \cos x(1 - \operatorname{sen}^2 x)dx$$

$$= \frac{3}{2}\int dx + \frac{3}{4}\int \cos 2x d(2x) + \int \cos x dx - \int \operatorname{sen}^2 x d(\operatorname{sen} x)$$

$$= \frac{3x}{2} + \frac{3}{4}\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C_2$$

De la solución de (I), (II) se tiene:

$$\int (1 + \cos x)^3 dx = \frac{5x}{2} + 4 \operatorname{sen} x + \frac{3}{4}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$$

18. $\int (\sqrt{\operatorname{sen} 2\theta} - \cos 2\theta)^2 d\theta = \int (\operatorname{sen} 2\theta - 2\operatorname{sen}^{1/2} 2\theta \cos 2\theta + \cos^2 2\theta)d\theta$

$$= \int \operatorname{sen} 2\theta d\theta - 2\int \operatorname{sen}^{1/2} 2\theta \cos 2\theta d\theta + \int \cos^2 2\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 2\theta d(2\theta) - \int \operatorname{sen}^{1/2} 2\theta d(\operatorname{sen} 2\theta) + \frac{1}{2}\int (1 + \cos 4\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 2\theta d(2\theta) + \int \operatorname{sen}^{1/2} 2\theta d(\operatorname{sen} 2\theta) + \frac{1}{2}\int d\theta +$$

$$+ \frac{1}{8}\int \cos 4\theta d(4\theta)$$

finalmente integrando se tiene:

$$= -\frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{2}{3}\operatorname{sen}^{3/2} 2\theta + \frac{\theta}{4} + \frac{1}{8}\operatorname{sen} 2\theta + C$$

19. $\int(\sqrt{\cos\theta} - 2\text{sen}\theta = \int (\cos\theta - 4\text{sen}\theta(\cos\theta)^{1/2} + 4\text{sen}^2\theta)d\theta$

$= \int \cos\theta d\theta + 4\int(\cos\theta)^{1/2}d(\cos\theta) + 2\int(1-\cos 2\theta)d\theta$

$= \int \cos\theta d\theta + 4\int(\cos\theta)^{1/2}d(\cos\theta) + 2\int d\theta - 2\int\cos 2\theta d\theta$

finalmente integrando se tiene:

$$\int(\sqrt{\cos\theta} - 2\text{sen}\theta)^2 d\theta = \text{sen}\theta + \frac{8}{3}(\cos\theta)^{3/2} + 2\theta - \text{sen}2\theta + C$$

20. $\int(\text{sen}2x - \text{sen}3x)^2dx = \int(\text{sen}^2 2x - 2\text{sen}2x\text{sen}3x + \text{sen}^2 3x)dx$

$= \int\text{sen}^2 2xdx - 2\int\text{sen}2x\text{sen}3xdx + \int\text{sen}^2 3xdx$

$= \frac{1}{2}\int(1 - \cos 4x)dx - \int[\cos(3-2)x - \cos(3+2)x]dx +$

$+ \frac{1}{2}\int(1 - \cos 6x)dx$

$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{8}\int\cos 4xd(4x) + \frac{1}{5}\int\cos 5xd(5x) - \int\cos xdx +$

$+ \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{12}\int\cos 6xdx$

finalmente integrando se tiene:

$= \frac{x}{2} - \frac{1}{8}\text{sen}4x + \frac{1}{5}\text{sen}5x - \text{sen}x + \frac{x}{2} - \frac{1}{12}\text{sen}6x + C$

$= x - \frac{\text{sen}4x}{8} + \frac{\text{sen}5x}{5} - \text{sen}x - \frac{\text{sen}6x}{12} + C$

21. $\int(\cos x + 2\cos 2x)^2dx = \int(\cos^2 x + 4\cos x\cos 2x + 4\cos^2 2x)dx$

$= \int\cos^2 xdx + 4\int\cos x\cos 2xdx + 4\int\cos^2 2xdx$

$= \frac{1}{2}\int(1 + \cos 2x)dx + 2\int[\cos(2-1)x + \cos(2+1)x]dx +$

$+ 2\int(1 + \cos 4x)dx$

$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{4}\int\cos 2xd(2x) + 2\int\cos xdx + \frac{2}{3}\int\cos 3xd(3x) +$

$+ 2\int dx + \frac{1}{2}\int\cos 4xd(4x)$

Finalmente integrando se tiene:

$$\int(\cos x + 2\cos 2x)dx = \frac{5}{2}x + \frac{\text{sen}2x}{4} + 2\text{sen}x + \frac{2}{3}\text{sen}3x + \frac{\text{sen}4x}{2} + C$$

22. $\int(\text{sen}x + \cos 2x)^2dx = \int(\text{sen}^2 x + 2\text{sen}x\cos 2x + \cos^2 2x)dx$

$= \int\text{sen}^2 xdx + 2\int\text{sen}x\cos 2xdx + \int\cos^2 2xdx$

$= \frac{1}{2}\int(1 - \cos 2x)dx + \int(\text{sen}3x - \text{sen}x)dx + \frac{1}{2}\int(1 - \cos 4x)dx$

$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{4}\int\cos 2xd(2x) + \frac{1}{3}\int\text{sen}3xd(3x) - \int\text{sen}xdx +$

$+ \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{8}\int\cos 4xd(4x)$

integrando se tiene:

$= x - \frac{1}{4}\text{sen}\ 2x - \frac{1}{3}\cos 3x + \cos x + \frac{1}{8}\text{sen}4x + C$

INTEGRACION POR SUSTITUCION TRIGONOMETRICAS

1. Si la integral contiene el radical $\sqrt{a^2 - u^2}$, generalmente se hace:

$u = a\operatorname{sen}\theta$, donde $\sqrt{a^2 - a^2\operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{a^2(1-\operatorname{sen}^2\theta)} = a\cos\theta$

2. Si la integral contiene el radical $\sqrt{u^2 - a^2}$, se hace

$u = a\sec\theta$, de donde $\sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2\theta - 1)} = a\operatorname{tg}\theta$

3. Si la integral contiene el radical $\sqrt{u^2 + a^2}$, se hace

$u = a\operatorname{tg}\theta$, de donde $\sqrt{a^2\operatorname{tg}^2\theta + a^2} = \sqrt{a^2(\operatorname{tg}^2\theta + 1)} = a\sec\theta$

En ciertos casos, en lugar de las sustituciones trigonométricas es preferible emplear las sustit. hiperbólicas cuyo caracter es respectivamente.

1. $u = a\operatorname{sen}\theta$ ó $u = a\operatorname{tgh}\theta$
2. $u = a\sec\theta$ ó $u = a\cosh\theta$
3. $u = a\operatorname{tg}\theta$ ó $u = a\operatorname{senh}\theta$

DEMOSTRAR LAS SIGUIENTES INTEGRACIONES

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 + 2)^{3/2}} = \frac{x}{2\sqrt{x^2 + 2}} + C$

Solución.

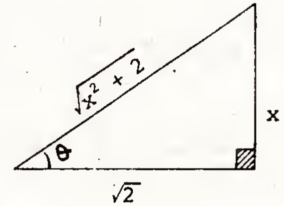
de la forma $\sqrt{u^2 + a^2}$ $\therefore$

Sea $x = \sqrt{2}\operatorname{tg}\theta$ por consiguiente $dx = \sqrt{2}\sec^2\theta d\theta$

$$= \int \frac{\sqrt{2}\sec^2\theta d\theta}{(2\operatorname{tg}^2\theta + 2)^{3/2}} = \int \frac{\sqrt{2}\sec^2\theta d\theta}{(2\sec^2\theta)^{3/2}} = \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2\theta d\theta}{\sec^3\theta} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\theta}{\sec\theta} = \frac{1}{2}\int \cos\theta d\theta = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta + C$$

Como: $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$ en el triángulo rectángulo se tiene:



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{(x^2 + 2)^{3/2}} = \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}} + C$$

2. $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 6}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 6} + 3\ln(x + \sqrt{x^2 - 6}) + C$

Solución.

Empleando la sustitución hiperbólica: $x = \sqrt{6}\cosh\theta$ por consiguiente $dx = \sqrt{6}\operatorname{senh}\theta d\theta$ de donde

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-6}} = \int \frac{6\sqrt{6}\cosh^2\theta\operatorname{senh}\theta d\theta}{\sqrt{6\cosh^2-6}} = 6\int \frac{\cosh^2\theta\operatorname{senh}\theta d\theta}{\operatorname{senh}\theta}$$

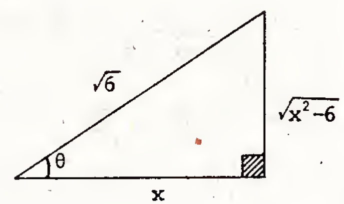
$$= 6\int \cosh^2\theta d\theta$$

$$= 3\int(\cosh 2\theta + 1)d\theta = 3\int \cosh 2\theta d\theta + 3\int d\theta$$

$$= \frac{3}{2}\int \cosh 2\theta d(2\theta) + 3\int d\theta$$

$$= \frac{3}{2}\operatorname{senh}2\theta + 3\theta + C = 3\operatorname{senh}\theta\cosh\theta + 3\theta + C$$

como: $\cosh\theta = \dfrac{x}{\sqrt{6}}$, en el triángulo rectángulo se tiene:



$$\operatorname{senh}\theta = \frac{\sqrt{x^2 - 6}}{\sqrt{6}} \text{ y}$$

$$e^{\theta} = \cosh\theta + \operatorname{senh}\theta = \frac{x + \sqrt{x^2 - 6}}{\sqrt{6}}$$

(Ver en el texto funciones hiperbólicas)

donde $\theta = \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - 6}}{\sqrt{6}}\right) \rightarrow 3\theta = 3\ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - 6}}{\sqrt{6}}\right)$

tendremos en difinitiva.

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-6}} = 3 \; \frac{x}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{x^2-6}}{\sqrt{6}} + 3\ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - 6}}{\sqrt{6}}\right) + C$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 6} + 3\ln(x + \sqrt{x^2 - 6}) - 3\ln\sqrt{6} + C$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 6} + 3\ln(x + \sqrt{x^2 - 6}) + C_1$$

donde: $C - 3\ln\sqrt{6} = C_1$ es una nueva constante arbitraria

3. $$\int \frac{dx}{(5 - x^2)^{3/2}} = \frac{x}{5\sqrt{5 - x^2}} + C$$

Solución.

empleando la sustitución:

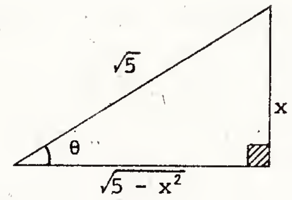
$x = \sqrt{5}\,\operatorname{sen}\theta$, entonces $dx = \sqrt{5}\cos\theta d\theta$, se tiene:

$$= \int \frac{\sqrt{5}\cos\theta d\theta}{(5 - 5\operatorname{sen}^2\theta)^{3/2}} = \int \frac{\sqrt{5}\cos\theta d\theta}{(5\cos^2\theta)^{3/2}} = \frac{1}{5}\int \frac{\cos\theta d\theta}{\cos^3\theta}$$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{5}\int \sec^2\theta d\theta = \frac{1}{5}\operatorname{tg}\theta + C$$

Como: $\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{\sqrt{5}}$, en el triángulo rectángulo se tiene

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{x}{\sqrt{5 - x^2}}$$



Finalmente tenemos:

$$\int \frac{dx}{(5 - x^2)^{3/2}} = \frac{x}{5\sqrt{5 - x^2}} + C$$

4. $$\int \frac{t^2 dt}{\sqrt{4 - t^2}} = -\frac{t}{2}\sqrt{4 - t^2} + 2\operatorname{arcsen}\frac{t}{2} + C$$

Solución.

empleando la sust. $t = 2\operatorname{sen}\theta$, entonces $dt = 2\cos\theta d\theta$

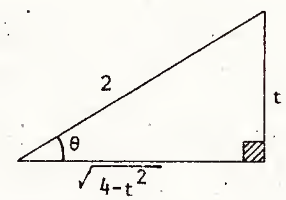
$$= \int \frac{4\operatorname{sen}^2\theta 2\cos\theta d\theta}{\sqrt{4 - 4\operatorname{sen}^2\theta}} = 4\int \operatorname{sen}^2\theta d\theta = 2\int (1 - \cos 2\theta) d\theta$$

$$= 2 \int d\theta - \int \cos 2\theta d(2\theta)$$

$$= 2\theta - \operatorname{sen}2\theta = 2\theta - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C$$

Como $\operatorname{sen}\theta = \frac{t}{2}$, en el triángulo rectángulo se tiene

$$= 2\operatorname{arcsen}\frac{t}{2} - 2 \cdot \frac{t}{2} \cdot \frac{4 - t^2}{2} + C$$



5. $$\int \frac{x^2 dx}{(x^2 + 8)^{3/2}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + 8}} + \ln(x + \sqrt{x^2 + 8}) + C$$

Solución.

Empleando la sustitución hiperbólica:

$$x = \sqrt{8}\,\operatorname{senh}\theta \quad \therefore \quad dx = \sqrt{8}\cosh\theta d\theta$$

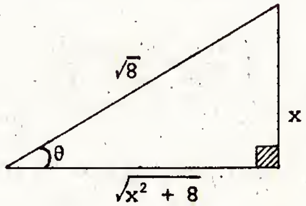
$$= \int \frac{8\operatorname{senh}^2\theta\sqrt{8}\cosh\theta d\theta}{(8\operatorname{senh}^2\theta + 8)^{3/2}} = \int \frac{8\sqrt{8}\operatorname{senh}^2\theta\cosh\theta d\theta}{(8\cosh^2\theta)^{3/2}}$$

$$= \int \frac{\operatorname{senh}^2\theta\cosh\theta d\theta}{\cosh^3\theta} = \int \frac{\operatorname{senh}^2\theta}{\cosh^2\theta} d\theta = \int \operatorname{tgh}^2\theta d\theta$$

$$= \int (1 - \operatorname{sech}^2)d\theta = \int d\theta - \int \operatorname{sech}^2\theta d\theta$$

$$= \theta - \operatorname{tgh}\theta + C$$

Como: $\operatorname{senh}\theta = \frac{x}{\sqrt{8}}$ en el triángulo rectángulo se tiene:



$$\operatorname{tg}\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 8}} \quad \text{y}$$

$$e^{\theta} = \cosh\theta + \operatorname{senh}\theta = \frac{x + \sqrt{x^2 + 8}}{\sqrt{8}}$$

$$\rightarrow \theta = \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 8}}{\sqrt{8}}\right)$$

Finalmente se tiene:

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2 + 8)^{3/2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + 8}) - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 8}} - \ln\sqrt{8} + C$$

$$= \ln(x + \sqrt{x^2 + 8}) - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 8}} + C_1$$

donde $C_1 = C - \ln\sqrt{8}$ es una constante arbitraria

6. $\displaystyle\int \frac{u^2 du}{(9 - u^2)^{3/2}} = \frac{u}{\sqrt{9 - u^2}} - \operatorname{arcsen}\frac{u}{3} + C$

Solución.

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{2 + \sqrt{x^2 + 4}}\right) + C$

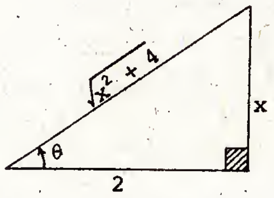
Solución.

Sea: $x = 2\operatorname{tg}\theta$, entonces $dx = 2\sec^2\theta d\theta$

$$= \int \frac{2\sec^2\theta d\theta}{2\operatorname{tg}\theta\sqrt{4\operatorname{tg}^2\theta + 4}} = \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2\theta d\theta}{\operatorname{tg}\theta 2\sec\theta} = \frac{1}{2}\int \frac{\sec\theta d\theta}{\operatorname{tg}\theta} = \frac{1}{2}\int \csc\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\ln(\csc\theta - \operatorname{ctg}\theta) + C$$

como $\operatorname{tg}\theta = \frac{x}{2}$, en el triángulo rectángulo se tiene



$$\csc\theta = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x}$$

$$\operatorname{ctg}\theta = \frac{2}{x}$$

finalmente se tiene:

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x} - \frac{2}{x}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+4} - 2}{x}\right) = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{x^2 + 4 - 4}{x(2 + x^2 + 4)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{2 + \sqrt{x^2 + 4}}\right) + C$$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{25 - x^2}} = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{x}{5 + \sqrt{25 - x^2}}\right)$

Solución.

Sea: $x = 5\operatorname{sen}\theta$, entonces

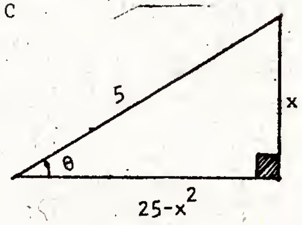
$dx = 5\cos\theta d\theta$

$$\int \frac{5\cos\theta d\theta}{5\text{sen}\theta\sqrt{25 - 25\text{sen}^2\theta}} = \int \frac{\cos\theta d\theta}{\text{sen}\theta 5\cos\theta} = \frac{1}{5}\int \frac{d\theta}{\text{sen}\theta}$$

$$= \frac{1}{5}\int \csc\theta d\theta = \frac{1}{5}\ln(\csc\theta - \text{ctg}\theta) + C$$

como $\text{sen}\theta = \frac{x}{5}$, entonces

en el triángulo rectángulo se tiene:



$$\csc\theta = \frac{5}{x}\ ,\ \text{ctg}\theta = \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x}$$

finalmente se tiene:

$$= \frac{1}{5}\ln\left(\frac{5}{x} - \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x}\right) + C = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{5 - \sqrt{25 - x^2}}{x}\right) + C$$

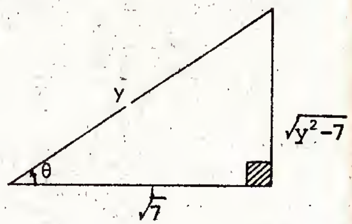
$$= \frac{1}{5}\ln\left(\frac{x}{5 + 25 - x^2}\right) + C$$

9. $$\int \frac{dy}{y^2\sqrt{y^2 - 7}} = \frac{\sqrt{y^2 - 7}}{7y} + C$$

Solución.

Sea $y = \sqrt{7}\sec\theta \rightarrow dy = \sqrt{7}\sec\theta\ \text{tg}\theta d\theta$

$$\int \frac{\sqrt{7}\sec\theta\ \text{tg}\theta d\theta}{7\sec^2\theta\sqrt{7\sec^2\theta - 7}} =$$



$$= \int \frac{\sqrt{7}\sec\theta\text{tg}\theta d\theta}{7\sec^2\theta\sqrt{7}\ \text{tg}\theta} = \frac{1}{7}\int \frac{d\theta}{\sec\theta}$$

$$= \frac{1}{7}\int \cos\theta d\theta = \frac{1}{7}\text{sen}\theta + C$$

como $\sec\theta = \frac{y}{\sqrt{7}}$, en el triángulo rectángulo se tiene:

$$\text{sen}\theta = \frac{\sqrt{y^2 - 7}}{y}$$

finalmente se tiene:

$$= \frac{1}{7}\frac{\sqrt{y^2 - 7}}{y} + C$$

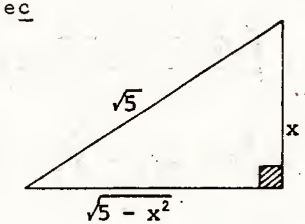
10. $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{5 - x^2}} = -\frac{\sqrt{5 - x^2}}{5x} + C$$

Sea $x = \sqrt{5}\ \text{sen}\theta \rightarrow dx = \sqrt{5}\cos\theta d\theta$

$$\int \frac{\sqrt{5}\cos\theta d\theta}{5\text{sen}^2\theta\sqrt{5 - 5\text{sen}^2\theta}} = \frac{1}{5}\int \frac{\sqrt{5}\cos\theta d\theta}{\text{sen}^2\theta\sqrt{5}\cos\theta} = \frac{1}{5}\int \frac{d\theta}{\text{sen}^2\theta}$$

$$= \frac{1}{5}\int \csc^2\theta d\theta = -\frac{1}{5}\text{ctg}\theta + C$$

como $\text{sen}\theta = \frac{x}{\sqrt{5}}$, en el triángulo rectángulo se tiene:



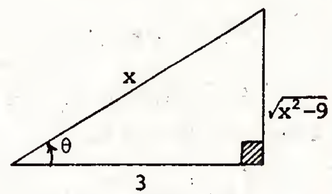
$$\text{ctg}\theta = \frac{\sqrt{5 - x^2}}{x}$$

finalmente se tiene:

$$= -\frac{1}{5}\text{ctg}\theta + C = -\frac{\sqrt{5 - x^2}}{5x} + C$$

11. $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2 - 9}} = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{18x^2} + \frac{1}{54}\text{arcsen}\frac{x}{3}$$

Solución.



Sea $x = 3\sec\theta \rightarrow dx = 3\sec\theta\text{tg}\theta d\theta$

$$\int \frac{3\sec\theta\text{tg}\theta d\theta}{27\sec^3\theta\sqrt{9\sec^2\theta - 9}} = \int \frac{3\sec\theta\text{tg}\theta d\theta}{27\sec^3\theta 3\text{tg}\theta} = \int \frac{d\theta}{27\sec^2\theta}$$

$$= \frac{1}{27}\int \cos^2\theta d\theta = \frac{1}{54}\int (1 + \cos 2\theta) d\theta = \frac{1}{54}\int d\theta +$$

$$+ \frac{1}{108}\int \cos 2\theta d(2\theta)$$

$$= \frac{\theta}{54} + \frac{1}{108}\,\text{sen}\,2\theta + C = \frac{\theta}{54} + \frac{1}{54}\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + C$$

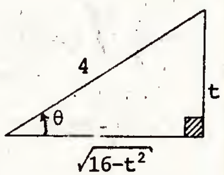
como $\sec\theta = \frac{x}{3} \to \theta = \text{arcsec}\,\frac{x}{3}$, $\text{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}$, $\cos\theta = \frac{3}{x}$

$$\therefore = \frac{\theta}{54} + \frac{1}{54}\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + C = \frac{1}{54}\,\text{arcsec}\,\frac{x}{3} + \frac{\sqrt{x^2-9}}{18x^2} + C$$

12. $\int \frac{16-t^2}{t^2}dt = -\frac{\sqrt{16-t^2}}{t} - \text{arcsen}\,\frac{t}{4} + C$

Solución :

Sea: $t = 4\,\text{sen}\,\theta \to dt = 4\cos\theta d\theta$



$$= \int \frac{\sqrt{16 - 16\,\text{sen}^2\theta}\;4\cos\theta d\theta}{16\,\text{sen}^2\theta} = \int \frac{16\cos\theta\cos\theta d\theta}{16\,\text{sen}^2\theta}$$

$$= \int ctg^2\theta d\theta = \int (\csc^2\theta - 1)d\theta = \int \csc^2\theta d\theta - \int d\theta$$

$$= -\,ctg\theta - \theta + C$$

como $\text{sen}\,\theta = \frac{t}{4} \to \text{arcsen}\,\frac{t}{4} = \theta$, $ctg\theta = \frac{\sqrt{16-t^2}}{t}$

$$\therefore -\,ctg\theta - \theta + C = -\frac{\sqrt{16-t^2}}{t} - \text{arcsen}\,\frac{t}{4} + C$$

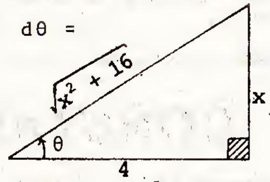
Hallar el valor de c/u de las integrales (la comprobación la dejamos para ud.)

13. $\int \frac{x^2+16}{x}dx$

Solución:

Sea: $x = 4\,tg\theta$ de donde: $dx = 4\sec^2\theta d\theta$

$$= \int \frac{\sqrt{16tg^2\theta + 16}\;4\sec^2\theta d\theta}{4tg\theta} = 4\int \frac{\sec^3\theta}{tg\theta}d\theta =$$



$$= 4\int \frac{\sec\theta(tg^2\theta + 1)}{tg\theta}d\theta$$

$$= 4\int \sec\theta tg\theta d\theta + 4\int \frac{\sec\theta}{tg\theta}d\theta = 4\int \sec\theta tg\theta d\theta + 4\int \csc\theta d\theta$$

$$= 4\sec\theta + 4\ln(\csc\theta - ctg\theta) + C$$

como: $tg\theta = \frac{x}{4}$, tendremos:

$\sec\theta = \frac{\sqrt{x^2+16}}{4}$, $ctg\theta = \frac{4}{x}$, $\csc\theta = \frac{\sqrt{x^2+16}}{x}$

finalmente se tiene:

$$= 4\sec\theta + 4\ln(\csc\theta - ctg\theta) + C = x^2 + 16 + 4\ln\left(\frac{x^2+16-4}{x}\right) + C$$

$$-\,4\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+16}-4}{x}\right) + C$$

14. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{4-x^2}}$

15. $\int \frac{\sqrt{100-u^2}}{u}du$

16. $\int \frac{dv}{(v^2-3)^{3/2}}$

17. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-5}}$

CAPITULO XIII

CONSTANTE DE INTEGRACION

DETERMINACION DE LA CONSTANTE DE INTEGRACION POR MEDIO DE CONDICIONES INICIALES

La constante de integración puede hallarse en un caso dado, cuando conocemos el valor de la integral para algún valor particular de la varirable.

PROBLEMAS.

Las siguientes expresiones se han obtenido derivando ciertas funciones. En cada caso hállese la función para los valores dadas de la variable y de la función.

1) $\frac{df(x)}{dx} = x - 3,\ x = 2,\ f(2) = 9$

Solución.

$d(f(x)) = (x - 3)dx \to$ integrando tenemos:

$$\int d(f(x)) = \int (x - 3)dx$$

$$\to f(x) = \int (x - 3)dx = \frac{1}{2}x^2 - 3x + C$$

pero $f(2) = 9 = 2 - 6 + C \to C = 13$

$\therefore$ la función será: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 13$

2) $\frac{d(f(x))}{dx} = 3 + x - 5x^2,\quad x = 6,\quad f(6) = -20$

Solución.

$d(f(x)) = (3 + x - 5x^2)dx$, integrando tenemos:

$$\int d(f(x)) = \int (3 + x - 5x^2)dx = 3\int dx + \int xdx - 5\int x^2dx$$

$$\to f(x) = 3x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3}x^3 + C$$

Como $f(6) = -20 = 18 + 18 - 360 + C \longrightarrow C = 304$

$\therefore$ la función será $f(x) = 3x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3}x^3 + 304$

3. $\frac{df(y)}{dy} = y^3 - b^2y\quad,\quad y = 2,\quad f(2) = 0$

Solución.

$df(y) = (y^3 - b^2y)dy$, integrando se tiene:

$$\int d(f(y)) = \int (y^3 - b^2y)dy = \int y^3dy - b^2\int ydy$$

$$f(y) = \frac{1}{4}y^4 - \frac{b^2}{2}y^2 + C$$

Como $f(2) = 0 = 4 - \frac{4}{2}b^2 + C \to C = 2b^2 - 4$

$\therefore$ la función será $f(x) = \frac{1}{4}y^4 - \frac{b^2}{2}y^2 + 2b^2 - 4$

4. $\frac{df(\theta)}{d\theta} = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta,\quad \theta = \frac{1}{2}\pi,\ f(\frac{1}{2}\pi) = 2$

Solución.

$df(\theta) = (\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)d\theta$, integrando tenemos

$$\int d(f(\theta)) = \int (\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)d\theta = \int \operatorname{sen}\theta d\theta + \int \cos\theta d\theta$$

$$f(\theta) = -\cos\theta + \operatorname{sen}\theta + C$$

Como $f(\frac{1}{2}\pi) = 2 = -\cos(\frac{\pi}{2}) + \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) + C$

$$\to C = 1$$

$\therefore$ La función será $f(\theta) = \operatorname{sen}\theta - \cos\theta + 1$

5. $\frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{t} - \frac{1}{2-t}$, $t = 1$, $f(1) = 0$

Solución.

$\int d(f(t)) = (\frac{1}{t} - \frac{1}{2-t})dt$, integrando se tiene:

$$\int d(f(t)) = \int(\frac{1}{t} - \frac{1}{2-t})dt = \int \frac{dt}{t} + \int\frac{d(2-t)}{2-t}$$

$$f(t) = \ln(t) + \ln(2-t) + C = \ln(2t - t^2) + C$$

como $f(1) = 0 = \ln(1) + C \rightarrow C = 0$

$\therefore$ La función será $f(t) = \ln(2t - t^2)$

6. $\frac{d(f(\phi))}{d\phi} = \sec^2\phi + tg\phi$, $\phi = 0$, $f(0) = 5$

Solución.

$d(f(\phi)) = (\sec^2\phi + tg\phi)d\phi$, integrando se tiene:

$$\int d(f(\phi)) = \int(\sec^2\phi + tg\phi)d\phi = \int \sec^2\phi d\phi + \int tg\phi d\phi$$

$$f(\phi) = tg\phi - \ln(\cos\phi) + C$$

Pero $f(0) = 5 = tg(0°) - \ln(\cos 0°) + C \rightarrow C = 5$

$\therefore$ La función será $f(\phi) = tg\phi - \ln(\cos\phi) + 5$

7. $\frac{d(f(x))}{dx} = \frac{1}{x^2 + a}$, $x = a$; $f(a) = \frac{\pi}{2a}$

Solución.

$d(f(x)) = \frac{dx}{x^2 + a^2}$, integrando se tiene:

$$\int d(f(x)) = \int\frac{dx}{x^2 + a^2} \rightarrow f(x) = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

Como: $f(a) = \frac{\pi}{2a} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{a}{a} + C = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}(1) + C =$

$$\frac{\pi}{2a} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\pi}{4} + C$$

$$\rightarrow \frac{\pi}{4a} + C = \frac{\pi}{2a} \rightarrow C = \frac{\pi}{4a}$$

$\therefore$ La función será: $f(x) = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{\pi}{4a}$

8. $\frac{d(f(x))}{dx} = bx^3 + ax + 4$, $x = b$, $f(b) = 10$

Solución.

$d(f(x)) = (bx^3 + ax + 4)dx$, integrando se tiene:

$$\int d(f(x)) = \int (bx^3 + ax + 4)dx = b\int x^3dx + a\int xdx + 4\int dx$$

$$f(x) = \frac{b}{4}x^4 + \frac{a}{2}x^2 + 4x + C$$

Como: $f(b) = 10 = \frac{b}{4}(b)^4 + \frac{a}{2}(b)^2 + 4b + C$

$$\rightarrow C = 10 - \frac{b^5}{4} - \frac{ab^2}{2} - 4b$$

$\therefore$ La función será:

$$f(x) = \frac{b}{4}x^4 + \frac{ax^2}{2} + 4x + 10 - \frac{b^5}{4} - \frac{ab^2}{2} - 4b$$

9. $\frac{df(t)}{dt} = \sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}$, $t = 4$, $f(4) = 0$

Solución.

$df(t) = (\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}})\,dt$, integrando se tiene:

$$\int df(t) = \int (\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}})dt = \int \sqrt{t}\, dt + \int \frac{dt}{\sqrt{t}} =$$

$$= \int t^{1/2}dt + \int t^{-1/2}dt$$

$$f(t) = \frac{2}{3} t^{3/2} + 2t^{1/2} + C$$

como $f(4) = 0 = \frac{2}{3} (4)^{3/2} + 2(4)^{1/2} + C$

$$0 = \frac{16}{3} + 4 + C \rightarrow C = -\frac{28}{3}$$

$\therefore$ La función será:

$$f(t) = \frac{2}{3} t^{3/2} + 2t^{1/2} - \frac{28}{3}$$

10. $\frac{df(\theta)}{d\theta} = \text{ctg}\theta - \csc^2\theta$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $f(\frac{\pi}{2}) = 3$

Solución.

$df(\theta) = (\text{ctg}\theta - \csc^2\theta)d\theta$, integrando se tiene:

$$\int df(\theta) = \int (\text{ctg}\theta - \csc^2\theta)d\theta = \int \text{ctg}\theta d\theta - \int \csc^2\theta d\theta$$

$$f(\theta) = \ln \text{sen}\theta + \text{ctg}\theta + C$$

como $f(\frac{\pi}{2}) = 3 = \ln \text{sen}\,\frac{\pi}{2} + \text{ctg}\,\frac{\pi}{2} + C \Rightarrow C = 3$

$f(\theta) = \ln \text{sen}\theta + \text{ctg}\theta + 3$

Hallar de la familia de curvas tales que la pendiente de la tangente en un punto cualquiera tiene el valor que se indica.

NOTA: La pendiente de la tg a una curva en un punto cualquiera es $\frac{dy}{dx}$

11. $\frac{dy}{dx} = m$ $\rightarrow$ separando las variables se tiene

$dy = mdx$, integrando se tiene

$\int dy = m \int dx \rightarrow y = mx + C$, la ecuación representa una familia de rectas.

12. $\frac{dy}{dx} = x$ $\rightarrow$ separando las variables se tiene:

$\int dy = \int xdx$ $\rightarrow$ integrando se tiene

$\int dy = \int xdx \rightarrow y = \frac{1}{2} x^2 + C$, representa una familia de parábolas.

13. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$ $\rightarrow$ separando las variables o integrando se tiene

$\int ydy = \int dx \rightarrow \frac{1}{2} y^2 = x + C$, representa una familia de parábolas.

14. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$ $\longrightarrow$ separando las variables e integrando

$\int ydy = \int x^2dx \rightarrow \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{3} x^3 + C$, representa la ecuación de una familia de parábolas semicúbicas

15. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^2}$, separando variable e integrando.

$\int y^2dy = \int xdx \rightarrow \frac{1}{3} y^3 = \frac{1}{2} x^2 + C$, representa la ecuación de una familia **de parábola semicúbica**

16. $\frac{dy}{dx} = 3x^2$, separando variables e integrando.

$dy = 3\ x^2dx \rightarrow y = x^3 + C$, representa la ecuación de una familia de parábola cúbicas.

17. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y^2}$ $\rightarrow$ separando variables e integrando

$\int y^2dy = \int dx \rightarrow \frac{1}{3} y^3 = x + C$, representa la ecuación de una familia de parábolas cúbicas

18. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$, separando variables o integrando.

$$\int y\,dy = \int x\,dx \to \frac{1}{2}\,y^2 = \frac{1}{2}\,x^2 + C \equiv y^2 - x^2 = C,$$

familias de hiperbolas equiláteras.

19. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$, separando variables e integrando

$$\int x\,dy = -\int y\,dx \longrightarrow x\int dy = -y\int dx \longrightarrow xy = -yx + C$$

$$= 2xy = C = xy = \frac{C}{2} = C_1$$

→ xy = C, ecuación de una familia de hipérbolas equiláte - ras.

20. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b^2x}{a^2y}$, separando variables o integrando se tiene

$$a^2\int y\,dy = b^2\int x\,dx \to \frac{a^2}{2}\,y^2 = \frac{b^2}{2}\,x^2 + C \equiv a^2y^2 - b^2x^2 = C,$$

familia de hiperbolas.

21. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b^2x}{a^2y}$, separando variables e integrando se tiene:

$$a^2\int y\,dy = -\,b^2\int x\,dx \longrightarrow \frac{a^2}{2}\,y^2 = -\frac{b^2}{2}\,x^2 + C$$

$\longrightarrow a^2y^2 + b^2x^2 = C$ familia de elipses

22. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 + x}{1 - y}$, separando variables e integrando.

$$\int (1-y)dy = \int (1+x)dx \longrightarrow \int dy - \int y\,dy = \int dx + \int x\,dx$$

$$\longrightarrow y - \frac{1}{2}\,y^2 = x + \frac{1}{2}\,x^2 + C \longrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 2y = C,$$

familia de circunferencias.

En c/u de los siguientes ejercicios, hallar la ecuación de la curva cuya pendiente en un punto cualquiera es la fun - ción dada de las coordenadas y que pasa por el punto particu - lar asignado.

23. la pendiente de la tangente es: $\dfrac{dx}{dx}$

Por lo tanto : $\dfrac{dy}{dx} = x$

separando variable e integrando se tiene:

$$\int dy = \int x\,dx \to y = \frac{1}{2}\,x^2 + C$$

puesto que la curva pasa por (1,1)

$$\to 1 = \frac{1}{2} + C \to C = \frac{1}{2}$$

∴ La ecuación de la curva es:

$$y = \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{2} \equiv 2y = x^2 + 1$$

24. $\dfrac{dy}{dx} = 4y$, P(1,1).

separando variables e integrando se tiene:

$$\int \frac{dy}{y} = 4\int dx \longrightarrow \ln y = 4x + C \qquad (*)$$

puesto que la curva pasa por P(1,1) → las coordenadas de es te punto deben satisface (*) → $\ln(1) = 4 + C \to C = - -$ por tanto la ecuación particular de la curva es :

$$\ln(y) = 4x - 4$$

25. $\dfrac{dy}{dx} = 2xy$, separando variables e integrando

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int x\,dx \to \ln y = x^2 + C \qquad (*)$$

puesto que (*) pasa por el punto (3,1)

$\rightarrow \ln(1) = 9 + C \rightarrow C = -9$

$\therefore$ La ecuación particular de la curva será:

$$\ln(y) = x^2 - 9$$

26. $\frac{dy}{dx} = -xy$, separando variable e integrando

$$\int \frac{dy}{y} = -\int x dx \rightarrow \ln(y) = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

puesto que (*) pasa por el punto (0,2)

$\rightarrow \ln(2) = C$

$\therefore$ la ecuación particular de la curva será:

$$\ln(y) = -\frac{1}{2}x^2 + \ln(2)$$

27. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y+1}$, separando variables e integrando

$$\int (y+1)dy = \int (x+1)dx = \frac{1}{2}y^2 + y = \frac{1}{2}x^2 + x + C$$

$$\equiv y^2 - x^2 + 2y - 2x = C \quad (*)$$

puesto que (*) pasa por el punto (0,1).

$\rightarrow 1 + 2 = C \rightarrow C = 3 \quad \therefore$ la ec. particular de la curva es: $y^2 - x^2 + 2y - 2x - 3 = 0$

28. $\frac{dy}{dx} = \frac{h-x}{y-k}$, separando variables e integrando

$$\int (y-k)dy = \int (h-x)dx = \frac{1}{2}y^2 - ky = hx - \frac{1}{2}x^2 + C \quad (*)$$

puesto que (*) pasa por el punto (0,0)

$\rightarrow C = 0 \quad \therefore$ La ecuación particular de la curva es:

$$y^2 + x^2 - 2ky - 2hx = 0$$

29. $\frac{dy}{dx} = y\sqrt{x}$; separando variables e integrando.

$$\int \frac{dy}{y} = \int \sqrt{x}dx \equiv \ln y = \frac{2}{3}x^{3/2} + C \quad (*)$$

puesto que (*) pasa por el punto (4,1)

$\rightarrow \ln(1) = \frac{2}{3}(4)^{3/2} + C \rightarrow C = -16$

$\therefore$ La ecuación particular de la curva es:

$$\ln(y) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 16 \equiv 3\ln(y) = 2(x\sqrt{x} - 24)$$

30. $\frac{dy}{dx} = \frac{4xy}{4x^2 - 15}$, separando variable e integrando

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{4xdx}{4x^2 - 15} \equiv \ln(y) = \frac{1}{2}\ln(4x^2 - 15) + C \quad (*)$$

puesto que (*) pasa por el punto (2,1)

$\rightarrow \ln(1) = \ln(16 - 15) + C \rightarrow C = 0$

$\therefore$ La ecuación particular de la curva es:

$$\ln(y) = \frac{1}{2}\ln(4x^2 - 15) \equiv 2\ln(y) = \ln(4x^2 - 15)$$

$$\equiv \ln e^{y^2} = \ln(e^{4x^2-15})$$

$$\equiv y^2\ln(e) = (4x^2-15)\ln(e) \equiv y^2 = 4x^2 - 15 \equiv 4x^2 - y^2 = 15$$

31. $\frac{dy}{dx} = x\sqrt{y}$ punto $(1,9)$

32. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2+4}$ punto $(1,2)$

33. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2+x}{3+y}}$, separando variables e integrando

$$\int (3+y)^{1/2}dy = \int (2+x)^{1/2}dx = \frac{2}{3}(3+y)^{1/2} = \frac{2}{3}(2+x)^{3/2} + C \ \ldots \ (*)$$

puesto que (*) pasa por el punto $(2,6)$

$$\rightarrow \frac{2}{3}(9)^{3/2} = \frac{2}{3}(4)^{3/2} + C \rightarrow C = \frac{38}{3}$$

∴ La ecuación particular de la curva será:

$$\frac{2}{3}(3+y)^{3/2} = \frac{2}{3}(2+x)^{3/2} + \frac{38}{3} \equiv (3+y)^{3/2} - (2+x)^{3/2} - 19 = 0$$

34. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y-1}{x-2}}$, separando variable e integrando

$$\rightarrow \int \frac{dy}{(y-1)^{1/2}} = \int \frac{dx}{(x-2)^{1/2}} \equiv 2(y-1)^{1/2} = 2(x-2)^{1/2} + C \qquad (*)$$

puesto que (*) pasa por $(3,5)$

$$\rightarrow 2(4)^{1/2} = 2 + C \rightarrow C = 2$$

∴ La ecuación particular de la curva será:

$$2(y-1)^{1/2} - 2(x-2)^{1/2} - 2 = 0$$

CAPITULO XIV

INTEGRAL DEFINIDA

PROBLEMAS:

1. Demostrar que $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -(F(a) + F(b)) = -\int_b^a f(x)dx$$

verificar las siguientes integraciones.

2. $\int_0^a (a^2x - x^3)dx = \int_0^a a^2xdx - \int_0^a x^3dx = a^2\int_0^a xdx - \int_0^a x^3dx$

$$= \left[\frac{a^2}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^a = \frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4} = \frac{a^4}{4}$$

3. $\int_1^e \frac{dx}{x} = 1$

Solución

$$\int_1^e \frac{dx}{x} = \left[\ln x\right]_1^e = \ln e - \ln(1) = 1 - 0 = 1$$

4. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3-2x}} = \int_0^1 (3-2x)^{-1/2}dx$

$$U = 3 - 2x \rightarrow -\frac{du}{2} = dx$$

$$-\frac{1}{2}\int u^{1/2}du = \left[-\frac{1}{2}\ \frac{u^{1/2}}{1/2}\right]_0^1 = \left[-u^{1/2}\right]_0^1 = \left[-(3-2x)^{1/2}\right]_0^1 = -1+\sqrt{3}$$

5. $\int_2^3 \frac{2tdt}{1+t^2} =$

$$u = 1 + t^2 \rightarrow du = 2tdt$$

$$\rightarrow \int_2^3 \frac{du}{u} = \ln(u)\Big]_2^3 = \ln(1+t^2)\Big]_2^3 = \ln(10) - \ln(5) =$$

$$= \ln[(2)(5)] - \ln(5))$$

$$= \ln 2 + \ln 5 - \ln 5 = \ln 2$$

6.- $\int_0^2 \frac{x^3 dx}{x+1} = \int_0^2 (x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1})dx =$

$$= \int_0^2 x^2 dx - \int_0^2 x dx + \int_0^2 dx - \int_0^2 \frac{dx}{x+1}$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \ln(x+1)\right]_0^2 = \frac{8}{3} - \ln 3.$$

7. $\int_0^r \frac{r dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{\pi r}{2}$

$$\rightarrow r\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = r\arcsen\left.\frac{x}{r}\right]_0^r = r \arcsen \frac{r}{r} - r\arcsen 0$$

$$= r\pi - r\frac{1}{2}\pi = \frac{r\pi}{2}$$

8. $\int_0^a (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2 dx = \int_0^a (a - 2\sqrt{ax} + x)dx$

$$= a\int_0^a dx - 2\sqrt{a}\int_0^a \sqrt{x}\, dx + \int_0^a x dx$$

$$ax - \frac{4}{3}\sqrt{a}\, x^{3/2} + \frac{1}{2}x^2\Big]_0^a = a^2 - \frac{4}{3}a^2 + \frac{1}{2}a^2 = \frac{a^2}{6}$$

9. $\int_0^4 \frac{x^2 dx}{x+1} = \int_0^4 (x - 1 + \frac{1}{x+1})dx = \int_0^4 x dx - \int_0^4 dx + \int_0^4 \frac{dx}{x+1}$

$$= \frac{1}{2}x^2 - x + \ln(x+1)\Big]_0^4 = 4 + \ln(5)$$

10. $\int_0^1 \frac{dx}{e^{3x}} =$

$$= \int_0^1 e^{-3x} dx = -\frac{1}{3}\int_0^1 e^{-3x}\, d(-3x) = \left[-\frac{1}{3}e^{-3x}\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{3e^3} + \frac{1}{3}$$

11. $\int_0^\pi \sqrt{2 + 2\cos\theta}\, d\theta = \sqrt{2}\int_0^\pi \sqrt{1 + \cos\theta}\, d\theta = 2\int_0^\pi \cos\frac{1}{2}\theta\, d\theta$

$$= 4\int_0^\pi \cos\frac{1}{2}\theta\, d(\frac{1}{2}\theta) = \left[4 \operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta\right]_0^\pi =$$

$$= 4\left[\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}0\right] = 4$$

12. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x\cos^3 x dx = \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}x \cos x)^3 dx = \int_0^{\pi/2} (\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x)^3 dx$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 2x dx = \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 2x)\operatorname{sen}2x dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}2x dx - \int_0^{\pi/2} \cos^2 2x\, \operatorname{sen}2x dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{6}\cos^3 2x\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{8}\left[-\frac{1}{2}\cos\pi + \frac{1}{6}\cos^3\pi\right] -$$

$$- \frac{1}{8}[-\frac{1}{2}\cos 0 + \frac{1}{6}\cos^3 0] = \frac{1}{12}$$

13. $\int_0^{\pi/4} \sec^4\theta d\theta = \int_0^{\pi/4} \sec^2\theta\sec^2\theta d\theta = \int_0^{\pi/4} (1 + tg^2\theta)\sec^2\theta d\theta$

$$= \int_0^{\pi/4} \sec^2\theta d\theta + \int_0^{\pi/4} tg^2\theta\sec^2\theta d\theta = \left[tg\theta + \frac{1}{3}tg^3\theta\right]_0^{\pi/4} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

Calcular el valor de c/u de las siguientes integrales definidas.

14. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{9-2x}} = \int_0^4 (9-2x)^{-1/2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^4 (9-2x)^{-1/2}d(9-2x)$

$= \left[-(9-2x)^{1/2}\right]_0^4$

$= -1+3 = 2$

15. $\int_0^3 \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+16}} = \int_0^3 t(t^2+16)^{-1/2}dt = \frac{1}{2}\int_0^3 (t^2+16)^{-1/2}d(t^2+16)$

$= 2\,\frac{1}{2}(t^2+16)^{1/2}\Big]_0^3 = \left[(t^2+16)^{1/2}\right]_0^3 = 5-4=1$

16. $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{2}a^2 \operatorname{arcsen}\frac{x}{a}\right]_0^a =$

$= \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen} 1 = \frac{\pi a^2}{4}$

17. $\int_0^1 xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x^2}d(-x^2) = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^1 =$

$= -\frac{1}{2e}+\frac{1}{2} = 0,6839\ldots$

18. $\int_0^\pi \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 2\int_0^\pi \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\,d(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}) = \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3\frac{\theta}{2}\Big]_0^\pi = \frac{2}{3}$

19. $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}dx = \int_0^1\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} =$

$= \left[x - \operatorname{arctg} x\right]_0^1 = 1-\frac{\pi}{4} = \frac{4-\pi}{4}$

PROBLEMAS:

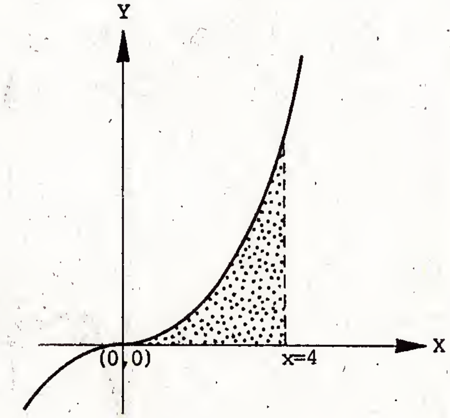
Hallar el área de la superficie limitada por la curva dada, el eje x y las ordenadas dadas.

1. $y = x^3,\ x = 0,\ x = 4$

$\rightarrow$ Area $= \int_0^4 x^3dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^4$

$= \frac{1}{4}(4)^4 = 4^3 = 64$

Area = 64



2. $y = 9 - x^2,\quad x = 0,\ x = 3$

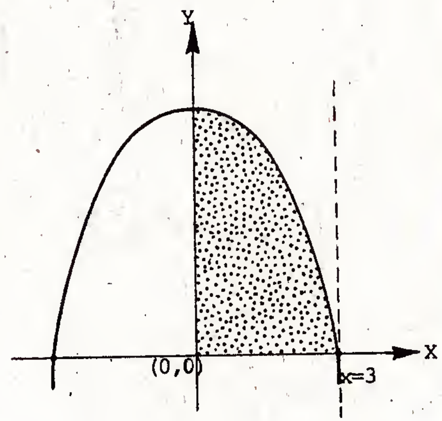
$A_T = \int_0^3 (9-x^2)dx$

$= \int_0^3 9dx - \int_0^3 x^2dx$

$A_T = \left[9x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^3$

$= 27 - \frac{27}{3} = 27 - 9 = 18$

$A_T = 18$



3. $y = x^3 + 3x^2 + 2x,\ x = -3,\ x = 3$

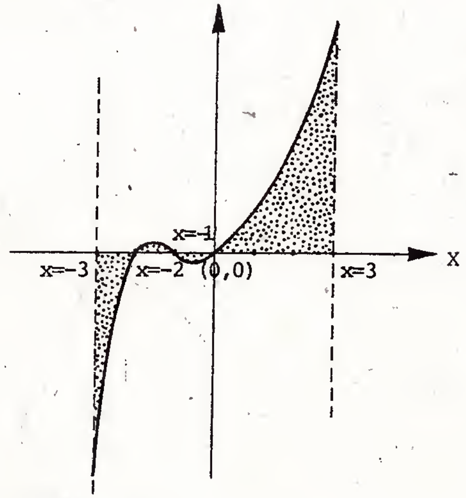
$A_T = -\int_{-2}^{-3}(x^3+3x^2+2x)dx + \int_{-2}^{-1}(x^3+3x^2+2x)dx$

$-\int_0^{-1}(x^3+3x^2+2x)dx + \int_0^3(x^3+3x^2+2x)dx$

$$A_T = -\left[\frac{1}{4}x^4 + x^3 + x^2\right]_{-2}^{-3} + \left[\frac{1}{4}x^4 + x^3 + x^2\right]_{-2}^{-1}$$

$$-\left[\frac{1}{4}x^4 + x^3 + x^2\right]_{0}^{-1} + \left[\frac{1}{4}x^4 + x^3 + x^2\right]_{0}^{3}$$

$$A_T = -\frac{9}{4} + \frac{225}{4} = \frac{216}{4} = 54$$



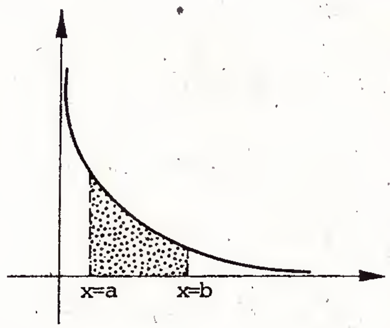
4. $xy = k^2$, $x = a$, $x = b$

$$A = \int_a^b \frac{k^2}{x}\,dx = k^2 \int_a^b \frac{dx}{x}$$

$$= \left[k^2 \ln x\right]_a^b$$

$$A = k^2(\ln b - \ln a) =$$

$$= k^2 \ln \frac{b}{a}$$

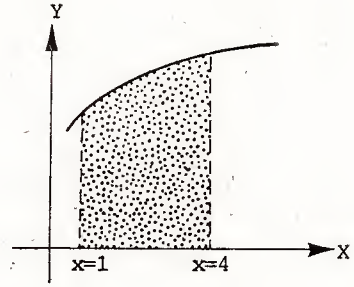


5. $y = 2x + \dfrac{1}{x^2}$, $x = 1$, $x = 4$

$$A = \int_1^4 \left(2x + \frac{1}{x^2}\right)dx = \int_1^4 2x\,dx + \int_1^4 \frac{dx}{x^2}$$

$$A = \left[x^2 - \frac{1}{x}\right]_1^4 =$$

$$= 16 - \frac{1}{4} = 15\ \frac{3}{4}$$



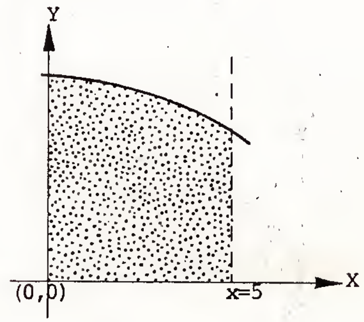
6. $y = \dfrac{10}{\sqrt{x+4}}$, $x = 0$, $x = 5$

$$A = \int_0^5 \frac{10}{\sqrt{x+4}}\,dx =$$

$$= 10\int_0^5 (x+4)^{-1/2}dx$$

$$A = 10\int_0^5 (x+4)^{-1/2}d(x+4)$$

$$= \left[20(x+4)^{1/2}\right]_0^5 = 20\left[\sqrt{9} - \sqrt{4}\right] = 20$$



7. $ay = x\sqrt{a^2 - x^2}$; $x = 0$, $x = a$

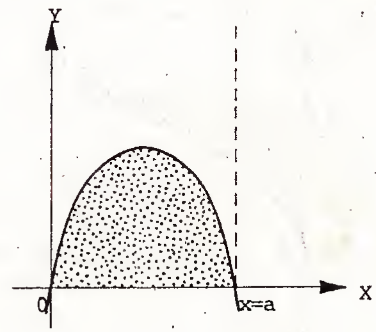
$$\rightarrow \text{Area} = \int_0^a \frac{x}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2a}\int_0^a (a^2 - x^2)^{1/2}d(a^2 - x^2)$$

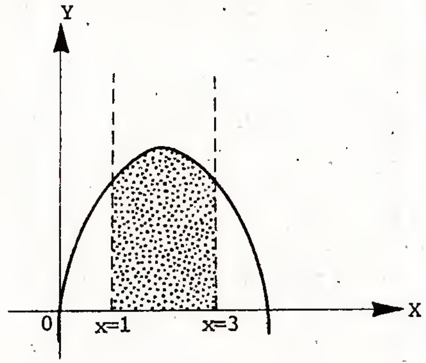
$$= \left[-\frac{1}{3a}\left[a^2 - x^2\right]^{3/2}\right]_0^a$$

$$= \frac{1}{3a}\cdot a^3 = \frac{1}{3}a^2$$



8. $y = 4x - x^2$;

$x = 1, \quad x = 3$

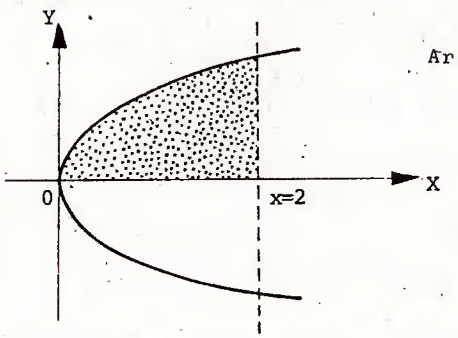


$$\text{Area} = \int_1^3 (4x-x^2)\,dx$$

$$= 4\int_1^3 x\,dx - \int_1^3 x^2\,dx$$

$$= \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{22}{3}$$

9. $2y^2 = x^3$, $x = 0$, $x = 2$



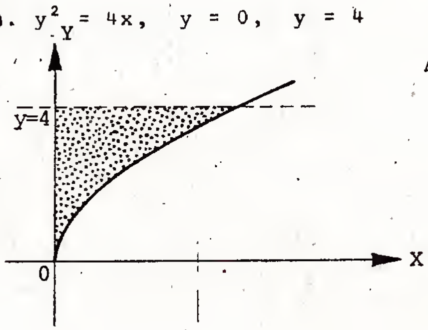
$$\text{Area} = \int_0^2 \sqrt{\frac{x^3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^2 x^{3/2}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{x^{5/2}}{5/2}\Big]_0^2$$

$$= \left[\frac{\sqrt{2}}{5}x^{5/2}\right]_0^2 = \frac{8}{5}$$

Hallar el área de la superficie limitada por la curva dada, el eje de las Y, y las rectas dadas.

10. $y^2 = 4x$, $y = 0$, $y = 4$

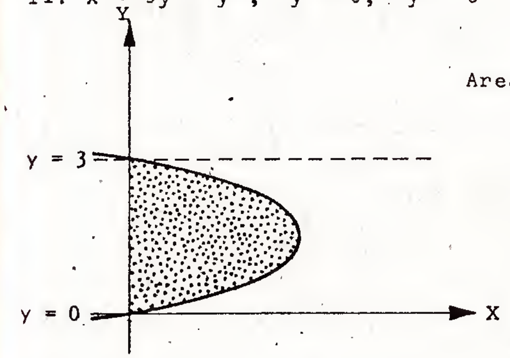


$$\text{Area} = \int_0^4 f(y)\,dy = \int_0^4 \frac{y^2}{4}\,dy$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^4 y^2\,dy = \left[\frac{y^3}{12}\right]_0^4$$

$$= \frac{16}{3} = 5\ \frac{1}{3}$$

11. $x = 9y - y^3$; $y = 0$, $y = 3$

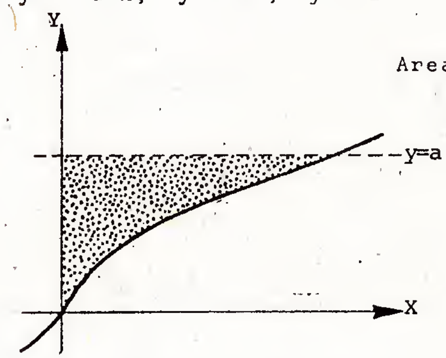


$$\text{Area} = \int_0^3 (9y-y^3)\,dy =$$

$$= 9\int_0^3 y\,dy - \int_0^3 y^3\,dy$$

$$= \left[\frac{9}{2}y^2 - \frac{y^4}{4}\right]_0^3 = \frac{81}{4}$$

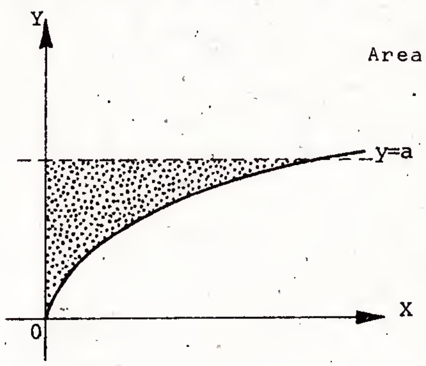
12. $y^3 = a^2x$, $y = 0$, $y = a$



$$\text{Area} = \int_0^a \frac{y^3}{a^2}\,dy = \frac{1}{a^2}\int_0^a y^3\,dy$$

$$= \frac{y^4}{4a^2}\Big]_0^a = \frac{a^4}{4a^2} = \frac{a^2}{4}$$

13. $ay^2 = x^3$; $y = 0$, $y = a$



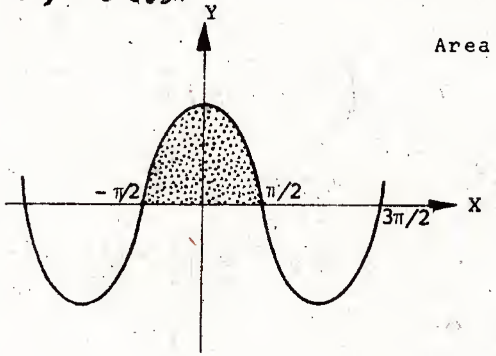
$$\text{Area} = \int_0^a \sqrt[3]{ay^2}\,dy = \int_0^a (ay^2)^{1/3}\,dy$$

$$= a^{1/3}\int_0^a y^{2/3}\,dy$$

$$= \left[\frac{3a^{1/3}\cdot y^{5/3}}{5}\right]_0^a$$

$$= \frac{3a^2}{5}$$

14. $y = 2\cos x$



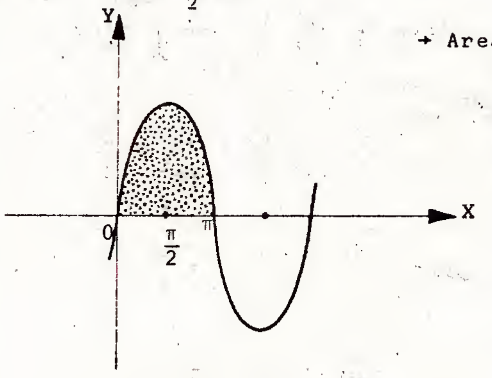
$$\text{Area} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} 2\cos x\,dx = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \cos x\,dx$$

$$= \Big[2\ \text{sen}\,x\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= 2\Big[\text{sen}\,\frac{\pi}{2} - \text{sen}\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\Big]$$

$$= 2\Big(\text{sen}\,\frac{\pi}{2} + \text{sen}\,\frac{\pi}{2}\Big) = 2(1+1) = 4$$

15. $y = 2\ \text{sen}\ \frac{1}{2}\pi x$



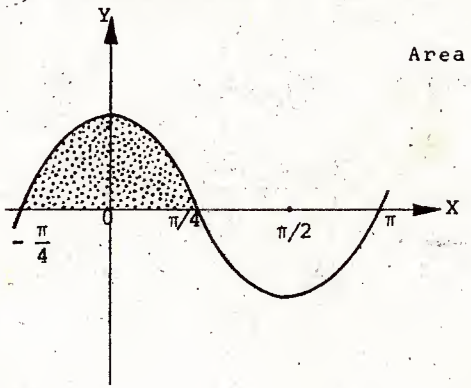
$$\rightarrow \text{Area} = \int_0^{\pi} 2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}\pi x\,dx$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} \text{sen}\,\frac{1}{2}\pi x\,d\Big(\frac{\pi x}{2}\Big)$$

$$= \frac{4}{\pi}\Big[-\cos\frac{1}{2}\pi x\Big]_0^{\pi}$$

$$= \frac{4}{\pi}[1+1] = \frac{8}{\pi}$$

16. $y = \cos 2x$



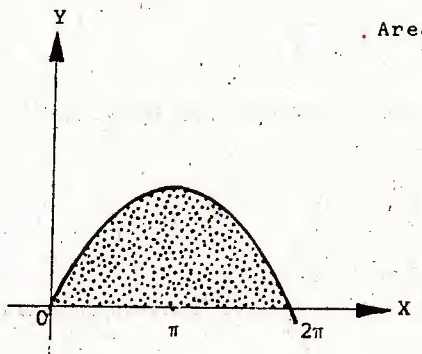
$$\text{Area} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi/4} \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi/4} \cos 2x\,d(2x)$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\text{sen}\ 2x\Big]_{-\pi/4}^{\pi/4} =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\text{sen}\,\frac{\pi}{2} + \text{sen}\,\frac{\pi}{2}\Big]$$

$$= \frac{1}{2}[1+1] = 1$$

17. $y = \text{sen}\ \frac{1}{2}\,x$



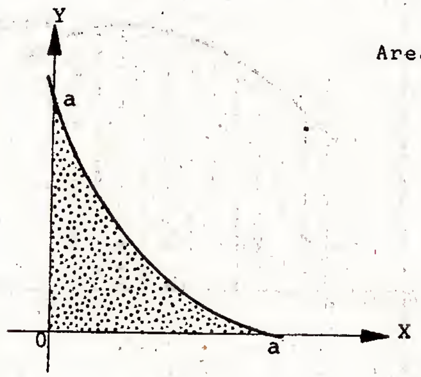
$$\text{Area} = \int_0^{2\pi} \text{sen}\ \frac{1}{2}\,x\ dx =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \text{sen}\ \frac{1x}{2}\ d\Big(\frac{1}{2}\,x\Big)$$

$$= 2\Big[-\cos\frac{1x}{2}\Big]_0^{2\pi} =$$

$$= 2[1+1] = 4$$

18. Hallar el área limitada por los ejes coordenados y la parábola $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ $\rightarrow$ $y = a + x - 2\sqrt{ax}$



$$\text{Area} = \int_0^a (a + x - 2\sqrt{ax})\,dx$$

$$= a\int_0^a dx + \int_0^a x\,dx -$$

$$- 2\sqrt{a}\int_0^a x^{1/2}\,dx$$

$$= \Big[ax + \frac{x^2}{2} - \frac{4}{3}\sqrt{a}\,x^{3/2}\Big]_0^a = \frac{a^2}{6}$$

INTEGRACION APROXIMADA

I.- FORMULA DE LOS TRAPECIOS:

Sea $\int_a^b f(x)dx$ ..... (1)

El valor numérico exacto de (1) es la medida del área de la superficie limitada por la curva.

$$y = f(x) \quad .... \quad (2)$$

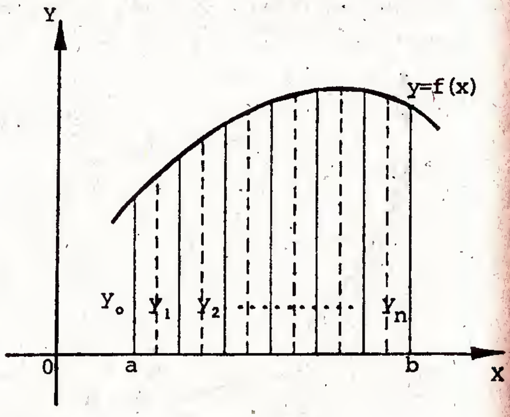
El eje de las x, y las ordenadas x = a, x = b
El valor de un área puede determinarse aproximadamente sumando trapecios: a saber:

1º) Dividir el segmento b - a de OX en n partes iguales sea Δx la longitud de una parte.

2º sea las abscisas sucesivas de los puntos de división.

$x_o = a, x_1, x_2, \ldots x_n = b$

y las ordenadas correspondiente en estos puntos sea:



$$y_o = f(x_o); \quad y_1 = f(x_1); \ \ldots \ y_n = f(x_n)$$

3º se formarán trapecios usando las extremidades de las ordenadas consecutiva por líneas rectas.

4º Se sabe que el área del trapecio es la semisuma de las bases por la altura, entonces se tiene:

$\frac{1}{2}(y_o + y_1)\Delta_x$ es área del 1er trapecio

$\frac{1}{2}(y_1 + y_2)\Delta_x$ es área del 2do trapecio

....

$\frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)\Delta_x$ es área del e-nésimo trapecio

Sumando obtenemos la fórmula de los trapecios

$$\text{Area} = A_T = (\tfrac{1}{2} y_o + y_1 + \ldots . y_{n-1} + \tfrac{1}{2} y_n)\Delta_x$$

PROBLEMAS.

Calcular los valores aproximados de las siguientes integrales por la fórmula de los trapecios, empleando los valores indicados de A, verificar los resultados efectuando las integraciones.

1. $\int_3^{10} \frac{dx}{x}$; n = 7

Solución.

Aquí: $\Delta_x = \frac{b - a}{n} = \frac{10 - 3}{7} = 1$

El área de que se trata es bajo la curva $y = \frac{1}{x}$, sustituyendo esta ecuación las abscisas x = 3,4,5,6,7,8,9,10; se tiene las ordenadas.

$$y = \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}$$

Luego aplicando la fórmula del trapecio.

$$\text{Area} = A_T = (\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}) \times 1$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{20} =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{20} =$$

$\rightarrow$ Area = A_T = 1.2 12 30 15

Comprobando por integración:

$$\int_3^{10} \frac{dx}{x} = \left[\ln\right]_3^{10} = \ln(10) - \ln(3) = 1.20397$$

2. $\displaystyle\int_4^8 \sqrt{64 - x^2}\, dx$; $n = 8$

El área que se trata es bajo la curva $y = \sqrt{64 - x^2}$

$$\rightarrow \quad \Delta_x = \frac{b - a}{n} = \frac{8 - 4}{8} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Haciendo una tabla:

x	y
4	6.92822032
4.5	6.6143782
5	6.2449979
5.5	5.809475
6	5.2915026
6.5	4.6636895
7	3.8729833
7.5	2.7838821
8	0

$$\rightarrow \quad \text{Area} = (\tfrac{1}{2} \times 6.92822032 + 6.6143782 + 6.2449942 + 35.75$$

$$+ 5.2915026 + 4.6636895 + 3.8729833 + 2.7838821)$$

$$\rightarrow A = (3.4641101 + 6.61 + 6.6143782 + 6.2449972 + 5.809475$$

$$+ 5.2915026 + 4.6636895 + 3.8729833 + 2.7838821)0.5$$

$A = 19.372509.$

Comprobación.

$$\int_4^8 \sqrt{64 - x^2} = \left[\frac{x}{2}\sqrt{64 - x^2} + 32 \text{ arcsen}(\tfrac{x}{8})\right]_4^8$$

$$= 32 \text{ arcsen}(1) - 2\sqrt{48} - 32 \text{ arcsen}(\tfrac{1}{2}) = 32 \times \frac{\pi}{2} -$$

$$- 13.856406 - 32 \times \frac{\pi}{6}$$

$A = 19.653995$

Calcular los valores aproximados de las siguientes integrales por la fórmula de los trapecios empleando los valores indicados

3. $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4 + x^3}}$; $n = 4$

Solución.

Sea $y = \dfrac{1}{\sqrt{4 + x^3}}$;

$$\rightarrow \Delta_x = \frac{b - a}{n} = \frac{4 - 0}{4} = 1$$

x	y
0	0.5
1	0.447
2	0.289
3	0.170
4	0.121

Aplicando la fórmula de los trapecios

$A = (0.25 + 0.447 + 0.289 + 0.170 + 0.0605) \times 1$

$A = 1.227$

4. $\displaystyle\int_0^{10} \sqrt[3]{125 - x^2}\, dx$; $n = 5$

Solución.

Sea $y = \sqrt[3]{125 - x^2}$; $\rightarrow \Delta_x = \dfrac{10 - 0}{5} = 2$

Haciendo una tabla de valores para x,y

x	y
0	5
2	4.94609
4	4.77686
6	4.46474
8	3.9365
10	2.92402

→ Aplicando la fórmula de los trapecios tenemos:

$A = (2.5 + 4.94609 + 4.77686 + 4.46476 + 3.9365 +$

$+ 1.46201) \times 2 =$

$A = 44.17$

5. $\displaystyle\int_2^8 \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{4 + x^2}}$; $n = 6$

Solución.

sea $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{4 + x^2}}$; → $\Delta_x = \dfrac{8 - 2}{6} = 1$

Haciendo una tabla de valores para x, y.

x	y
2	1
3	1.2758736
4	1.4736113
5	1.6274346
6	1.7544116
7	1.8635408
8	1.9599916

Por la fórmula de los trapecios.

$Area = (0.5 + 1.2758736 + 1.4736113 + 1.6274346 +$

$+ 1.7544116 + 1.8635408 + 0.9799958) \times 1$

$Area = 9.47$

5. $\displaystyle\int_0^2 x^2\sqrt{16 - x^4}\,dx$; $n = 4$

Solución.

$y = x^2\sqrt{16 - x^4}$

→ $A_x = \dfrac{2 - 0}{4} = \dfrac{1}{2} = 0.5$

Haciendo una tabla de valores para x; y

x	y
0	0
0.5	0.9980449
1	3.8729833
1.5	7.4411754
2	0

→ Por la fórmula de los trapecios

$Area = (0.9980449 + 3.8729833 + 7.4411754) \times 0.5$

$Area = 6.156$

6. $\displaystyle\int_1^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{10 + x^2}}$, $n = 6$

Solución.

Sea: $y = \dfrac{x}{\sqrt{10 + x^2}}$; $\Delta_x = \dfrac{4 - 1}{6} = \dfrac{1}{2} = 0.5$

Haciendo una tabla de valores para x,y.

x	y
1	0.3015113
1.5	0.4101515
2	0.4714045
2.5	0.4938648
3	0.4931969
3.5	0.4813299
4	0.4649905

por la fórmula del trapecio se tiene:

$Area = (0.1507556 + 0.4101515 + 0.4938648 + 0.4931969 +$

$+ 0.4813299 + 0.2324952) \times 0.5$

$Area = 1.13$

II) FORMULA DE SIMPSON (FORMULA PARABOLICA)

La fórmula de Simpson para n, par es:

$$\text{Area} = \frac{\Delta_x}{3}(y_o + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots\; y_n)$$

PROBLEMAS.

Calcular por la fórmula de Simpson, los valores aproximados de las siguientes integrales, empleando los valores de n indicados. Verificar los resultados efectuando las integraciones.

1. $\displaystyle\int_3^6 \frac{xdx}{4 + x^2}$; $n = 6$

Solución :

El área en cuestión es bajo la curva $y = \dfrac{x}{4 + x^2}$

$\rightarrow \quad \Delta_x = \dfrac{6 - 3}{6} = \dfrac{1}{2} = 0.5$

Haciendo una tabla de valores para x,y

x	y
3	0.2307692
3.5	0.4666666
4	0.2
4.5	0.185567
5	0.1724137
5.5	0.1605839
6	0.15

$\rightarrow$ Por la fórmula de Simpson el área será:

$$\text{Area} = \frac{0.5}{3}(0.2307692 + 4 \times 0.40666666 + 2 \times 0.2 + 4 \times$$

$$\times\, 0.185567 + 2 \times 0.1724137 + 4 \times 0.1605839 + 0.15)$$

$$\text{Area} = (0.2307692 + 1.866664 + 0.4 + 0.742268 + 0.3448274 +$$

$$+\, 0.6423356 + 0.15)0.1666666$$

$\rightarrow$ Area = 0.729473

Comprobación:

$$\int_3^6 \frac{x}{4 + x^2} = \frac{1}{2}\ln(4 + x^2)\Big]_3^6 = \frac{1}{2}\ln\frac{40}{13} = 0.561965$$

2. $\displaystyle\int_2^8 \sqrt{64 - x^2}\,dx$; $n = 6$

Solución.

$y = \sqrt{64 - x^2}$; $\rightarrow \quad \Delta_x = \dfrac{8 - 2}{6} = 1$

Haciendo una tabla de valores para x,y:

x	y
2	7.745
3	7.416
4	6.928
5	6.244
6	5.291
7	3.872
8	0

$\rightarrow$ por la fórmula de Simpson el área será

$$\text{Area} = \frac{1}{3}(7.745 + 29.664 + 13.856 + 24.976 + 10.582 +$$

$$+\, 15.488)$$

Area = 34.069.

Verificación.

$$\int_2^8 \sqrt{64 - x^2}\,dx = \left[\frac{x}{2}\sqrt{64 - x^2} + 32 \operatorname{arcsen}\frac{x}{8}\right]_2^8$$

$$= 32 \operatorname{arcsen}(1) - \sqrt{60} - 32 \operatorname{arcsen}(\tfrac{1}{4})$$

$$= 32 \times \frac{\pi}{2} - 7.745 - 32 \times \frac{\pi^2}{36} = 33.7476$$

Calcular los valores aproximados de las siguientes integrales según la fórmula de Simpson, empleando los valores de n indicados.

3. $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4 + x^3}}$; $n = 4$

Solución :

$y = \frac{1}{\sqrt{4+x^3}}$, $\Delta_x = \frac{4-0}{4} = 1$

Haciendo una tabla de valores para x,y:

x	y
0	0.5
1	0.447
2	0.288
3	0.179
4	0.121

→ por la fórmula de Simpson el área será:

Area = 0.333 x (0.5 + 1.788 + 0.577 + 0.718 + 0.121)

= 1.233

4. $\int_1^5 \sqrt{126 - x^3}\, dx$; n = 4

Solución.

$y = \sqrt{126 - x^3}$ → $\Delta_x = \frac{5-1}{4} = 1$

Haciendo una tabla de valores para x, y:

x	y
1	11.180
2	10.862
3	9.949
4	7.874
5	1.

→ por la fórmula de Simpson el área será:

Area = 0.333 x (11.180 + 43.451 + 19.899 + 31.496 + 1)

Area = 35.306

5. $\int_1^5 \sqrt[3]{6 + x^2}\, dx$; n = 4

Solución. $y = \sqrt[3]{6 + x^2}$

→ $\Delta_x = \frac{5-1}{4} = 1$

Haciendo una tabla de valores para x, y:

x	y
1	1.911
2	2.152
3	2.463
4	2.799
5	3.137

Por la fórmula de Simpson el área será

Area = 0.333 x (1.911 + 8.611 + 4.927 + 11.196 + 3.137)

Area = 9.917

6. $\int_1^5 \sqrt[3]{x^3 - x}\, dx$; n = 4.

Solución. Sea $y = \sqrt[3]{x^3 - x}$ → $\Delta_x = \frac{5-1}{4} = 1$

Haciendo una tabla de valores para x, y:

x	y
1	0
2	1.816
3	2.881
4	3.909
5	4.924

por la fórmula de Simpson el área será:

Area = 0.333 x (0 + 7.264 + 5.762 + 15.638 + 4.924)

Area = 11.190

Descomposición del intervalo de integración en una integral definida.

Se sabe que:

$\int_a^{x_1} f(x)dx = F(x_1) - F(a)$ cuando $(a < x_1 < b)$ y

$\int_{x_1}^{b} f(x)dx = F(b) - F(x_1)$

$$\rightarrow \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^b f(x)dx = F(x_1) - F(a) + F(b) - F(x_1) =$$

$$= F(b) - F(a)$$

pero: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

$\rightarrow$ Se concluye que: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^b f(x)dx$

INTERCAMBIO DE LIMITES

Se sabe que:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad y$$

$$\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a))$$

$$\rightarrow \int_a^b f(x) = -\int_b^a f(x)dx$$

INTEGRALES IMPROPIAS. LIMITES INFINITOS

I). Cuando el Límite superior es infinito.

$$\rightarrow \int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$; con tal que existe el límite

II) Cuando el límite inferior es infinito.

$$\rightarrow \int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx;$$ con tal que exista el límite

III) Cuando $f(x)$ es discontinua:

1er Caso: Cuando la función para integrar es continua para todo los valores de x entre los límites a y b; con excepción de $x = a$.

Si $a < b$; $\varepsilon > 0$, se emplea la siguiente definición.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx;$$ siempre que exista el límite

2do Caso:

Cuando $f(x)$ es continua salvo en $x = b$; definimos:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon}$$; siempre que exista el límite

3er Caso:

Si $a < c < b$; y $f(x)$ continua salvo en $x = c$; entonces, siendo ε; ε' números positivos, la integral entre a y b se se define:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx$$; siempre que los límites existan.

PROBLEMAS.

Verificar cada una de las siguientes integraciones.

1. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} =$; por (I) se tiene que:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b\to+\infty} \left[\operatorname{arctg} x\right]_0^b = \frac{\pi}{2}$$

2. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-1}} =$

por (I) se tiene que

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-1}} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-1}} = \lim_{b\to+\infty} \left[\operatorname{arcsen} \sqrt{2}x\right]_1^b = \frac{\pi}{4}$$

3. $\int_1^5 \frac{xdx}{\sqrt{5-x}}$

por el 2do caso de (III) se tiene que:

$$\int_1^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{5-x}} = \lim_{\varepsilon\to o}\int_1^{5-\varepsilon}\frac{x\,dx}{\sqrt{5-x}}$$

Haciendo $u^2 = 5 - x \rightarrow x = 5 - u^2 \rightarrow dx = -2udu$

en la integral se tiene:

$$\lim_{\varepsilon\to o}\int_1^{5-\varepsilon}\frac{x\,dx}{\sqrt{5-x}} = \lim_{\varepsilon\to+o} -2\int_1^{5-\varepsilon}(5-u^2)du =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to o}\left[-2(5u - \frac{u^3}{3})\right]_1^{5-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to o}\left[-2(\frac{15u - u^3}{3})\right] = \lim_{\varepsilon\to o}\left[-\frac{2(15\sqrt{5-x} - \sqrt{(5-x)^3})}{3}\right]_1^{5-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to o} -2\left[\frac{15\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\varepsilon^3} - 15 \times 2 + 8}{3}\right] = \frac{44}{3}$$

4. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

por el 2º caso de (III) se tiene:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to o}\int_1^{2-\varepsilon}\frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$$

Haciendo la sustitución.

$$u^2 = 4 - x^2 \rightarrow x = \sqrt{4-u^2} \rightarrow dx = \frac{-udu}{\sqrt{4-u^2}}$$

en la integral se tiene:

$$= \lim_{\varepsilon\to o} -\int_1^{2-\varepsilon}\frac{du}{(4-u^2)^{3/2}} = \lim_{\varepsilon\to o}\left[-(\frac{u}{4\sqrt{4-u^2}})\right]_1^{2-\varepsilon}$$

pero: $u^2 = 4 - x^2$

$$\rightarrow = \lim_{\varepsilon\to o}\left[-(\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x})\right]_1^{2-\varepsilon} = \frac{1}{4}\sqrt{3}$$

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx =$

por (I) se tiene: $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-ax}dx$

$$= \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{a}\int_0^b e^{-ax}d(-ax) = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{a}(e^{-ax})\right]_o^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{a}(\frac{1}{e^{ab}} - \frac{1}{e^o})\right] = \frac{1}{a}$$

6. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

por el 2do caso de III se tiene:

$$\int_0^a \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to o}\int_0^{a-\varepsilon}\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

Haciendo la sustitución.

$$u^2 = a^2 - x^2 \rightarrow x^2 = a^2 - u^2 \rightarrow dx = \frac{-udu}{\sqrt{a^2-u^2}}$$

en la integral se tiene:

$$\lim_{\varepsilon\to o}\int_0^{a-\varepsilon}\frac{(a^2-u^2)\frac{(-udu)}{\sqrt{a^2-u^2}}}{u} = \lim_{\varepsilon\to o} -\int_0^{a-\varepsilon}\sqrt{a^2-u^2}\,du$$

$$= \lim_{\varepsilon\to o} -\left[\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{u}{a}\right]_o^{a-\varepsilon}$$

pero, $u^2 = a^2 - x^2$

$$\rightarrow \lim_{\varepsilon\to o} -\left[\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right]_o^{a-\varepsilon} = \frac{1}{2}\pi a^2$$

7. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}$

por (I) se tiene:

$$\int_1^{+\infty}\frac{x\,dx}{(1+x^2)^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}$$

Haciendo la sustitución:

$$u = 1+x^2 \quad \to \quad \frac{du}{2} = x\,dx$$

en la integral se tiene:

$$\lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\int_1^b\frac{du}{u^2} = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2u}\right]_1^b \quad ; \quad \text{pero} \quad u = 1+x^2$$

$$\to \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{1+x^2}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

8. $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)^2+1}$$

Aplicando el 3er caso de III;

Como: $-\infty < 0 < +\infty$

$$\to \int_{-\infty}^{-\infty}\frac{dx}{(x+1)^2+1} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{(x+1)^2+1} + \int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)^2+1}$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{(x+1)^2+1} + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{(x+1)^2+1}$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\Big[\operatorname{arctg}(x+1)\Big]_a^0 + \lim_{b\to\infty}\Big[\operatorname{arctg}(x+1)\Big]_0^b$$

$$= \lim_{a\to\infty}(\operatorname{arctg}(1) - \operatorname{arctg}(a+1)) + \lim_{b\to\infty}(\operatorname{arctg}(b+1) - \operatorname{arctg}(1))$$

$$= \pi$$

CAPITULO XV

INTEGRACION COMO SUMA

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO INTEGRAL

Sea f(x) una función contínua en el intervalo desde x = a, hasta x = b. Divídase este intervalo en n subintervalos cuya longitud son:

$$\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \Delta x_3,\ \ldots\ldots\ \Delta x_n$$

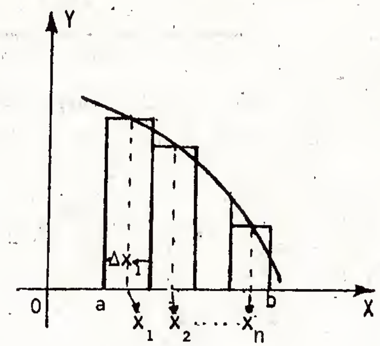
y elijánse puntos, uno en cada subintervalo, que tenga las abscisas $x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots\ x_n$ respectivamente.

Considerese la suma:

$$f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \ldots\ldots f(x_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \quad \ldots (1)$$

Entonces, el calor límite de esta suma cuando n tiende a infinito, y cada subintervalo tiende a cero es igual al valor de la integral definida; es decir:

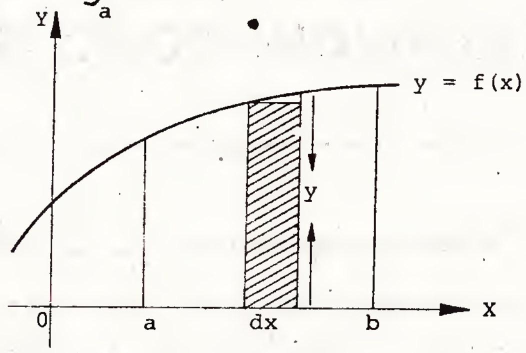
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x)\Delta x_i \quad \ldots\ldots (2)$$



COORDENADAS RECTANGULARES:

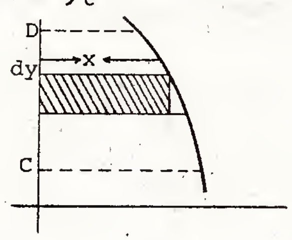
1. El área entre una curva, el eje de las x, y las coordenadas correspondientes $x = a$, $x = b$, viene dada por la fórmula

$$\text{Area} = \int_a^b y\,dx \quad \dots\dots\dots\dots \quad (3)$$



2. El área entre una curva, el eje de las y, y las coordenadas correspondiente: $x = C$, $y = D$ viene dada por la fórmula:

$$\text{Area} = \int_c^d x\,dy \quad \dots\dots \quad (4)$$



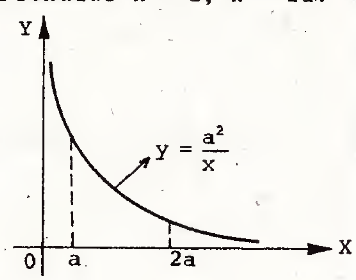
PROBLEMAS

1) Hallar el área de la superficie limitada por la hipérbola $xy = a^2$; el eje de las x, y las ordenadas $x = a$, $x = 2a$.

$$\rightarrow \text{Area} = \int_a^{2a} \frac{a^2}{x}\,dx = a^2\int_a^{2a}\frac{dx}{x} =$$

$$= a^2 \ln x \Big]_a^{2a}$$

$$\rightarrow A = a^2\left[\ln 2a - \ln a\right]$$



$$A = a^2 \ln 2$$

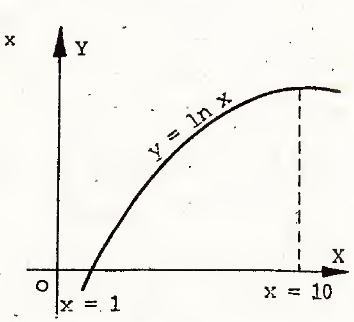
2. Hallar el área de la superficie limitada por la curva $y = \ln x$, el eje de las x, y la recta $x = 10$.

$$\rightarrow \text{Area} = \int_1^{10} \ln x\,dx = x \ln x - \int_1^{10} dx$$

$$A = \Big[x \ln x - x\Big]_1^{10}$$

$$A = 10 \ln 10 - 9$$

$$A = 14.026.$$



3. Hallar el área de la superficie limitada por la curva $y = xe^x$, el eje de las x, y la recta $x = 4$.

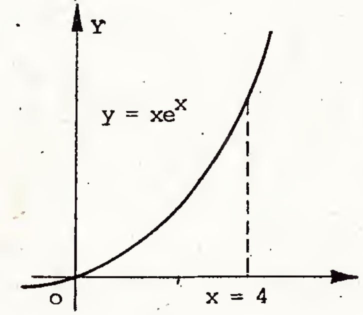
Solución.

$$\rightarrow \text{Area} = \int_0^4 xe^x\,dx$$

$$= \Big[xe^x - e^x\Big]_0^4$$

$$= \Big[e^x(x - 1)\Big]_0^4$$

$$A = 164.8$$



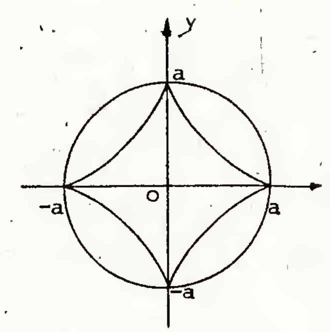
4. Hallar el área total de la hipocicloide

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

$$\rightarrow y = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$$

$$\rightarrow \text{Area} = \int_0^a (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}\,dx$$

Haciendo la sustitución



$x = at^3 \rightarrow dx = 3at^2dt$; donde los límites de integración son:

$x = 0, \quad t = 0$

$x = a, \quad t = 1$

→ En la integral se tiene:

$$\int_0^1 (a^{2/3} - a^{2/3}t^2)^{3/2}(3at^2dt) = 3a^2\int_0^1 (1 - t^2)^{3/2}t^2dt \quad \dots (1)$$

nuevamente haciendo la sustitución trigonométrica.

$t = sen\theta$; $dt = cos\theta d\theta$, donde los límites de integración son ahora: $t = 0 \; ; \; \theta = 0$

$t = 1 \; ; \; \theta = \frac{\pi}{2}$

→ en la integral tendremos:

$$3a^2\int_0^{\pi/2} (1 - sen^2\theta)^{3/2} sen^2\theta cos\theta d\theta = 3a^2\int_0^{\pi/2} cos^3\theta sen^2\theta cos\theta d\theta$$

$$= 3a^2\int_0^{\pi/2} cos^4\theta sen^2\theta d\theta = \frac{3a^2}{8}\int_0^{\pi/2} (1 + cos2\theta)^2(1 - cos2\theta)d\theta$$

$$= \frac{3a^2}{8}\int_0^{\pi/2} (1 + cos2\theta - cos^2 2\theta - cos^3 2\theta)d\theta$$

$$= \frac{3a^2}{8}\left\{\int_0^{\pi/2} d\theta + \int_0^{\pi/2} cos2\theta - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1 + cos4\theta) - \int_0^{\pi/2} cos2\theta(1 - sen^2 2\theta)d\theta\right\}$$

$$= \frac{3a^2}{8}\left\{\int_0^{\pi/2} d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} cos2\theta d(2\theta) - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta - \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} cos4\theta d(4\theta) + \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} cos2\theta d(2\theta) + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} sen^2 2\theta d(sen2\theta)\right\}$$

$$= \frac{3a^2}{8}\left[\theta + \frac{1}{2}sen2\theta - \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}sen4\theta - \frac{1}{2}sen2\theta + \frac{1}{6}sen^3 2\theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{3a^2}{8}\left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}sen4\theta + \frac{1}{6}sen^3 2\theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{3a^2\pi}{32}$$

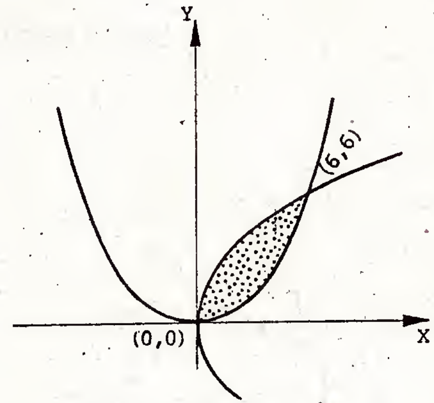
→ $A = \frac{3a^2\pi}{32}$ es el área de la cuarta parte del hipocicloide

∴ El área total será:

$$4A = \frac{4 \times 3a^2\pi}{32} = \frac{3a^2\pi}{8}$$

Hallar las áreas de las superfucie limitadas por las siguientes curvas, en c/problema trazar la figura.

5. $y^2 = 6x, \quad x^2 = 6y$



→ Area $= \int_0^6 (\sqrt{6x} - \frac{x^2}{6})dx$

→ $A = \int_0^6 \sqrt{6x}\,dx - \frac{1}{6}\int_0^6 x^2dx$

Haciendo:

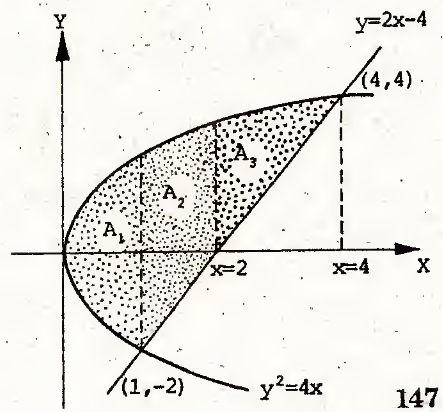
$u = 6x \rightarrow \frac{du}{6} = dx$

→ $A = \frac{1}{6}\int_0^6 u^{1/2}du - \frac{1}{6}\int_0^6 x^2dx$

→ $A = \left[\frac{1}{9}u^{3/2} - \frac{1}{18}x^3\right]_0^6 = \left[\frac{1}{9}(6x)^{3/2} - \frac{1}{18}x^3\right]_0^6$

→ $A = 24 - 12 = 12$

6. $y^2 = 4x \; ; \; 2x - y = 4$



→ $A_T = A_1 + A_2 + A_3$

→ 1) $A_1 = 2\int_0^1 2\sqrt{x}dx$

$$= \left[\frac{8}{3}x^{3/2}\right]_0^1 = \frac{8}{3}$$

2) $A_2 = \int_1^2 (2x^{1/2} - 2x + 4)dx = \left[\frac{4}{3} x^{3/2} - x^2 + 4x\right]_1^2$

$\rightarrow A_2 = \frac{4}{3}\sqrt{8} - \frac{1}{3}$

3) $A_3 = \int_2^4 (2x^{1/2} - 2x + 4)dx = \left[\frac{4}{3} x^{3/2} - x^2 + 4x\right]_2^4$

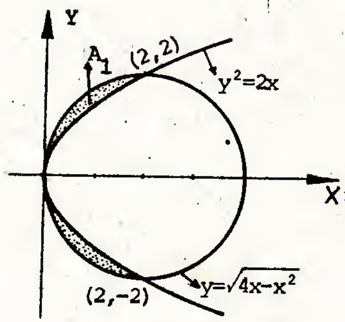
$\rightarrow A_3 = \frac{20}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{8}$

$\rightarrow$ de (1), (2) y (3) tenemos:

$$A_T = \frac{8}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{8} - \frac{1}{3} + \frac{20}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{8} = \frac{27}{3} = 9$$

$$\rightarrow A_T = 9$$

7. $y^2 = 2x, \quad x^2 + y^2 = 4x$



$A_T = 2A_1$

$\rightarrow A_1 = \int_0^2 (\sqrt{4x-x^2} - \sqrt{2x})dx$

$A_1 = \int_0^2 \sqrt{4x-x^2}\,dx - \int_0^2 \sqrt{2x}dx$

$= \int_0^2 \sqrt{4-(x-2)^2}dx - \sqrt{2}\int_0^2 x^{1/2}dx$

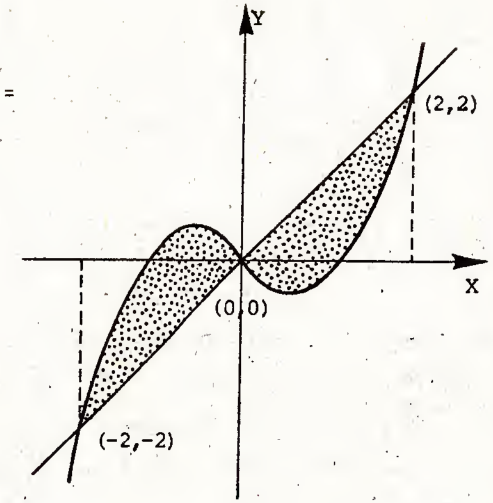
$\rightarrow A_1 = \left[\frac{x-2}{2}\sqrt{4x-x^2} + 2\text{arcsen}\frac{(x-2)}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right]_0^2$

$\rightarrow A_1 = 2\text{arcsen}(0) - \frac{16}{3} = \frac{2\pi - 16}{3}$

pero $A_T = 2A_1$, puesto que el gráfico nos indica que hay simêtrica respecto al eje x

$\rightarrow A_T = 2(2\pi - \frac{16}{3}) = 1,900 \quad ; \quad \rightarrow A_T = 1,900$

8. $y = x^3 - 3x \; ; \quad y = x$



$\rightarrow A = \int_0^2 (x - x^3 + 3x)dx =$

$= \int_0^2 (4x - x^3)dx$

$A = 4\int_0^2 xdx - \int_0^2 x^3dx$

$A = \left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 4$

En el gráfico se ve que existe simetría con respecto al eje y

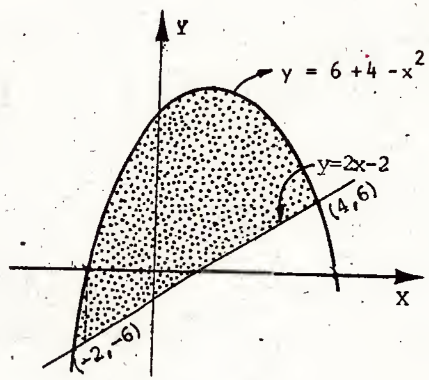
$\longrightarrow A_T = 2A = 8$

9. Hallar el área de la superficie limitada por la parábola $y = 6 + 4x - x^2$; y la cuerda que une los puntos (-2,-6) y (4,6).

Solución.

La ecuación de la cuerda que pasa por los puntos (-2,-6),(4,6) es

$y + 6 = 2(x+2) \rightarrow y = 2x-2$



Luego el área sombreada será :

$$A_T = \int_{-2}^{4}(8+2x-x^2)dx = [8x + x^2 - \frac{x^3}{3}]_{-2}^{4} = 36$$

10. Hallar el área de la superficie limitada por la parábola semicúbica $y^3 = x^2$; y la cuerda que une los puntos (-1,1), (8,4).

Solución :

La ecuación de la cuerda que pasa por los puntos (-1,1), (8,4) es: $y - 1 = \frac{1}{3}(x+1) \to y = \frac{1}{3}(x+4)$

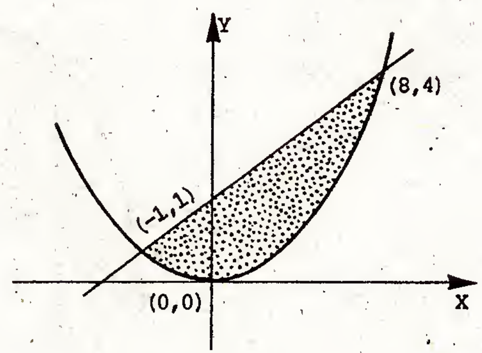
→ El área será:

$$A = \int_{-1}^{8}\left(\frac{x+4}{3} - x^{2/3}\right)dx$$

$$A = \frac{1}{3}\int_{-1}^{8} x\,dx + \frac{4}{3}\int_{-1}^{8} dx - \int_{-1}^{8} x^{2/3}dx$$

$$A = \left[\frac{1}{6}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{3}{5}x^{5/3}\right]_{-1}^{8}$$

A = 2.7



11. Hallar una fórmula para el área de la superficie limitada por la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = a^2$, el eje de las x, y una recta trazada del origen a cualquier punto (x,y) de la curva.

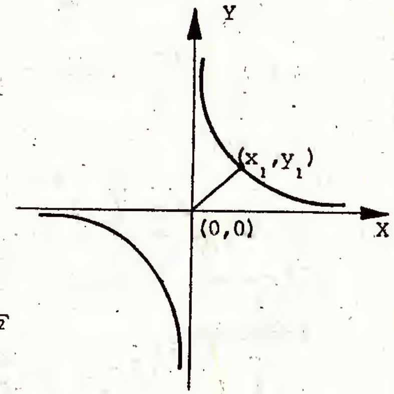
Solución :

→ La ecuación de la recta que pasa por (x_1,y_1) y(0,0) es:

$$y = \frac{y_1}{x_1}x \to x = \frac{x_1}{y_1}y$$

De la hipérbola :

$$x = \sqrt{y^2 + a^2}$$



$$\to A = \int_0^y \left(\sqrt{y^2+a^2} - \frac{x_1}{y_1}y\right)dy$$

$$A = \int_0^y \sqrt{y^2+a^2}\,dy - \frac{x_1}{y_1}\int_0^y y\,dy$$

$$A = \left[\frac{y}{2}\sqrt{y^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(y+\sqrt{y^2+a^2}) - \frac{x_1}{2y_1}y^2\right]_0^y$$

$$= \frac{y}{2}\sqrt{y^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(y+\sqrt{y^2+a^2}) - \frac{x_1}{2y_1}y^2 - \frac{a^2}{2}\ln a \;..(*)$$

como $x = \sqrt{y^2+a^2}$; en (*) se reemplaza

$$= \frac{yx}{2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(\frac{y+x}{a}\right) - \frac{x_1}{2y_1}y^2 \;......\;(**)$$

a su vez $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x}{y}$; reemplazando en (**)

$$A = \frac{yx}{2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(\frac{y+x}{a}\right) - \frac{xy}{2}$$

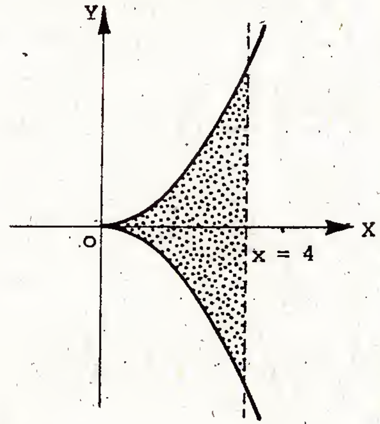
$$\to A = \frac{a^2}{2}\ln\left(\frac{y+x}{a}\right)$$

12. Hallar el área de la superficie limitada por la curva.

$y = x(1 \pm \sqrt{x})$ y la recta $x = 4$

Solución.

→ El área será:



$$A = \int_0^4 [x(1+\sqrt{x}) - x(1-\sqrt{x})]\,dx$$

$$A = \int_0^4 2x^{3/2}dx = 2\int_0^4 x^{3/2}dx$$

$$A = \left[\frac{4}{5}x^{5/2}\right]_0^4 = \frac{128}{5}$$

$$A = \frac{128}{5}$$

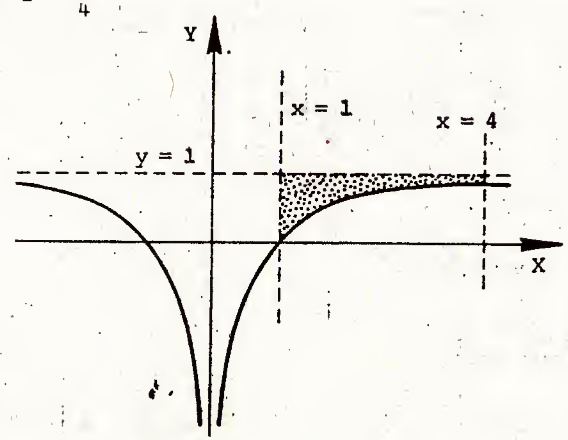
13. Hallar el área de la superficie limitada por la curva $x^2y = x^2 - 1$, las rectas $y = 1$; $x = 1$, $x = 4$.

Solución.

$$A = \int_1^4 (1 - (1 - \frac{1}{x^2}))dx$$

$$A = \int_1^4 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big]_1^4$$

$$A = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$$



Los ejes coordenados y las coordenadas del punto (1,1) forman un cuadrado calcular la razón de la mayor a la menor de las áreas en las que el dividido por cada una de las siguientes curvas.

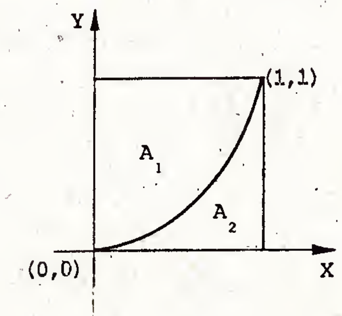
14. $y = x^2$

Solución:

1º El área de A_1 será

$$A_1 = \int_0^1 (1 - x^2)dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow A_1 = \frac{2}{3}$$



2do El área de A_2 será:

$$A_2 = \int_0^1 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{3}$$

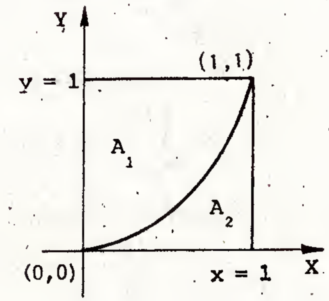
$$\rightarrow \text{La razón } \frac{A_1}{A_2} = 2$$

15. $y = x^4$

Solución :

1º El área de A_1 Será

$$\int_0^1 (1 - x^4)dx = \left[x - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{4}{5}$$



$$\rightarrow A_1 = \frac{4}{5}$$

2do El área de A_2 será.

$$\int_0^1 x^4dx = [\frac{x^5}{5}]_0^1 = \frac{1}{5}$$

$$\rightarrow \text{La razón } \frac{A_1}{A_2} = 4$$

16. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

Solución :

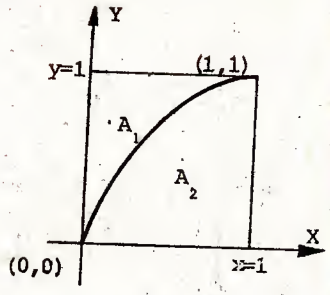
$$\sqrt{y} = 1 - \sqrt{x} \xrightarrow{2} y = 1 - 2\sqrt{x} + x$$

1° El área de A_1 será : á:

$$A_1 = \int_0^1 (1 - 1 + 2\sqrt{x} - x)dx$$

$$A_1 = 2\int_0^1 x^{1/2}dx - \int_0^1 xdx$$

$$A_1 = \left[\frac{4x^{3/2}}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{5}{6}$$



2do El área de A_2 será:

$$A_2 = \int_0^1 (1 - 2\sqrt{x} + x)dx = \left[x - \frac{4}{3}x^{3/2} + \frac{x}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

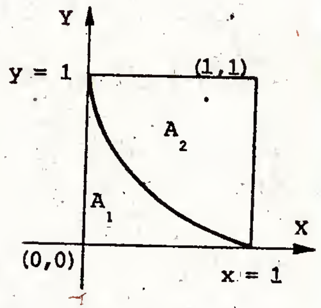
→ La razón $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{5/6}{1/6} = 5$

17. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

Solución :

1º El área de A_1 será

$$A_1 = \int_0^1 (1 - x^{2/3})^{3/2}dx$$



Haciendo:

$x = t^3 \rightarrow dx = 3t^2dt$

$$\rightarrow A_1 = 3\int_0^1 (1 - t^2)^{3/2}t^2dt \quad \ldots (1)$$

nuevamente haciendo la sustitución:

$$\begin{cases} t = 0 \; ; \; \theta = 0 \\ t = 1 \; ; \; \theta = \pi/2 \end{cases}$$

$t = \operatorname{sen}\theta \longrightarrow dt = \cos\theta d\theta$

$$A_1 = 3\int_0^{\pi/2} (1 - \operatorname{sen}^2\theta)^{3/2}\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta d\theta = 3\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\operatorname{sen}^2\theta d\theta$$

$A_1 = 3\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta \operatorname{sen}^2\theta d\theta = \frac{3\pi}{32}$ **por el ejercicio Nº 4; donde a = 1.**

2º $A_1 + A_2 = 1 \rightarrow A_2 = 1 - \frac{3\pi}{32} = \frac{32 - 3\pi}{32}$

3º La razón $\dfrac{A_2}{A_1} = \dfrac{32 - 3\pi}{3\pi}$

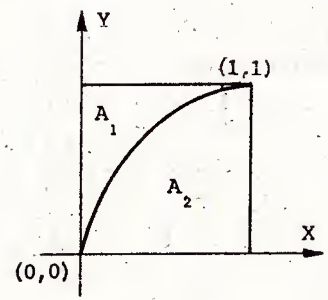
18. $y = \operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}$

Solución :

1º Area de A_2 será:

$$A_2 = \int_0^1 \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}xdx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^1 \operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}\, d(\frac{\pi}{2}x)$$



$$A_2 = \left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}$$

pero: $A_T = A_1 + A_2 = 1$

$\rightarrow A_1 = 1 - \frac{2}{\pi} = \frac{\pi - 2}{\pi}$

$\rightarrow \dfrac{A_2}{A_1} = \dfrac{2}{\pi - 2}$

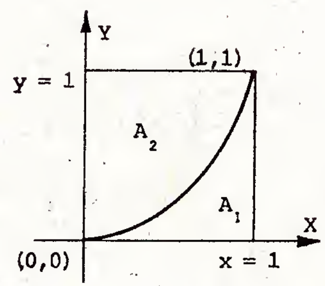
19. $y = \operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}$

Solución:

$$A_1 = \int_0^1 \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}xdx = \frac{4}{\pi}\int_0^1 \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}xd(\frac{\pi}{4}x)$$

$$A_1 = \left[-\frac{4}{\pi}\ln\cos\frac{\pi}{4}x\right]_0^1$$

$$= -\frac{4}{\pi}\ln(\frac{\sqrt{2}}{2})$$



$$\rightarrow A_1 = -\frac{4}{\pi}\ln\sqrt{2} + \ln 2 =$$

$$= \ln 2(1 - \frac{2}{\pi})$$

$$\ln 2\left(\frac{\pi - 2}{\pi}\right)$$

$$A_T = A_1 + A_2 = 1$$

$$A_2 = 1 - \ln(2)\left(\frac{\pi - 2}{\pi}\right) = \frac{\pi - \ln(2)(\pi - 2)}{\pi}$$

$$\rightarrow \text{ La razón } \frac{A_2}{A_2} = \frac{\pi}{\ln 2(\pi - 2)} - 1$$

Para cada una de las siguientes curvas, calcular el área de la superficie del primer cuadrante limitado por el arco de la curva que va desde el eje de las y hasta la 1ra intersección con el eje de las x.

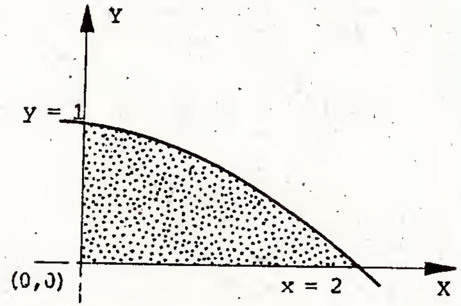
20. $x + y + y^2 = 2$

Solución :

$$A = \int_0^1 (2 - y - y^2)dy =$$

$$= [2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}]_0^1$$

$$\rightarrow A = 1\frac{1}{6}$$



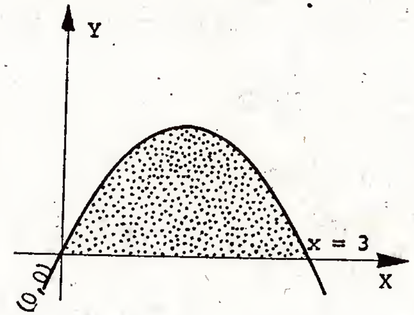
21. $y = x^3 - 8x^2 + 15x$

Solución :

$$A = \int_0^3 (x^3 - 8x^2 + 15x)dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{8}{3}x^3 + \frac{15}{2}x^2\right]_0^3$$

$$A = \frac{63}{4} = 15\frac{3}{4}$$

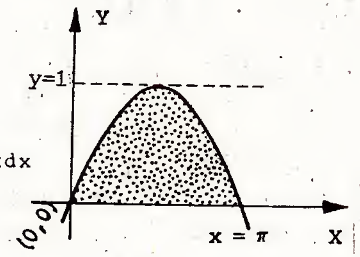


22. $y = e^x \operatorname{sen} x$

Solución:

$$\rightarrow A = \int_0^3 e^x \operatorname{sen} x dx$$

$$= -e^x \cos x + \int_0^\pi e^x \cos x dx$$



$$A = \int_0^\pi e^x \operatorname{sen} x dx = \left[-e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x\right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \operatorname{sen} x dx$$

$$A = 2\int_0^\pi e^x \operatorname{sen} x dx = \left[e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x\right]_0^\pi$$

$$A = \frac{1}{2}\left[e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x\right]_0^\pi$$

$$\rightarrow A = \frac{1}{2}(1 + e^\pi) = 12.0704$$

$$\rightarrow A = 12.0704$$

23. $y = e^{x/2}\cos 2x$

Solución :

$$\rightarrow A = \int_0^{\pi/4} e^{x/2}\cos 2x dx = \frac{1}{2}e^{x/2}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{4}\int e^{x/2}\operatorname{sen} 2x dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{x/2}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{8}e^{x/2}\cos 2x - \frac{1}{16}\int_0^{\pi/4} e^{x/2}\cos 2x dx$$

$$\frac{17}{16}\int_0^{\pi/4} e^{x/2}\cos 2x = \left[\frac{1}{2}\theta^{x/2}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{8}e^{x/2}\cos 2x\right]_0^{\pi/4}$$

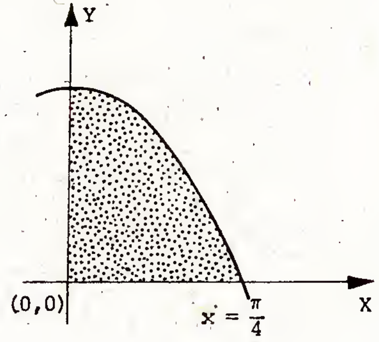
$$\rightarrow A = \int_0^{\pi/4} e^{x/2}\cos 2x = \frac{16}{17}\left[\frac{1}{2}\theta^{x/2}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{8}e^{x/2}\cos 2x\right]_0^{\pi/4}$$

$$\rightarrow A = \frac{1}{17}\left[8e^{x/2}\operatorname{sen} 2x - \right.$$

$$\left. - 2e^{x/2}\cos 2x\right]_0^{\pi/4}$$

$$A = \frac{1}{17}(8e^{\pi/8} - 2) = 0.57928$$

$$\rightarrow A = 0.57928$$



24. $y = \text{sen}(x + 1)$

Solución :

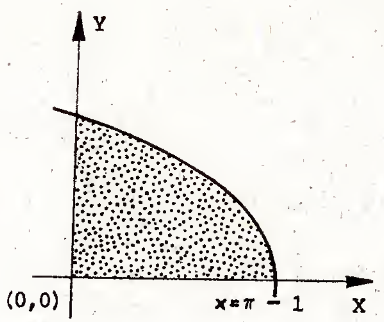
$$A = \int_0^{\pi-1} \text{sen}(x+1)dx$$

$$= -\cos(x+1)\Big]_0^{\pi-1}$$

$$A = -\cos\pi + \cos(1)$$

$$= 1 + 0.999$$

$$A = 1.9999$$

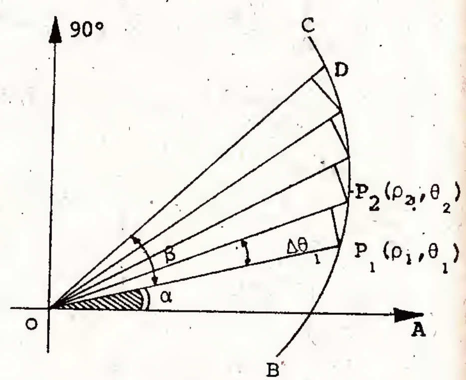


AREA DE CURVAS PLANAS COORDENADAS POLARES

Sea:

$\rho = f(\theta)$ la ecuación de la curva: y OP_1; OD dos radios vectores; α, β los ángulos que forman estos radios y el eje polar

→ Aplicando el teorema fundamental para hallar el área entre los dos radios vectores y la curva se tendrá:



1ro que el área pedida es el límite de la suma de sectores, circulares.

2do Sean los ángulos centrales de los sectores: $\Delta\theta_1$, $\Delta\theta_2$, ... etc y sus radios ρ_1, ρ_2, ...

Entonces la suma de las áreas de los sectores será:

$$\frac{1}{2}\rho_1^2\Delta\theta_1 + \frac{1}{2}\rho_2^2\Delta\theta_2 + \dots + \frac{1}{2}\rho_n^2\Delta\theta_n = \sum_{i=1}^{n}\rho_i^2\Delta\theta_i$$

ya que el área de un sector circular $= \frac{1}{2}$ radio x arco.

$\rightarrow \frac{1}{2}\rho_1\ \rho_1\Delta\theta_1 = \frac{1}{2}\rho_1^2\Delta\theta_1$, $\frac{1}{2}\rho_2\rho_2\Delta\theta_2 = \frac{1}{2}\rho_2^2\Delta\theta_1$ y asi sucesivamente.

3ro Aplicando el teorema fundamental,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\rho_i\Delta\theta_i = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\rho^2 d\theta$$

Por lo tanto, el área barrida por el radio vector de la curva cuando pasa de la posición OP_1 a la posición OD se da por la fórmula:

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2 d\theta$$

sustituyéndose de la ecuación de la curva el valor de ρ en términos de θ.

PROBLEMAS.

1.- Hallar el área de la superficie limitada por el círculo $\rho = a\cos\theta$, y las rectas $\theta = 0$; $\theta = 60°$.

Solución.

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}\rho^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} a^2\cos^2\theta d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/3}\frac{(1+\cos 2\theta)}{2}d\theta$$

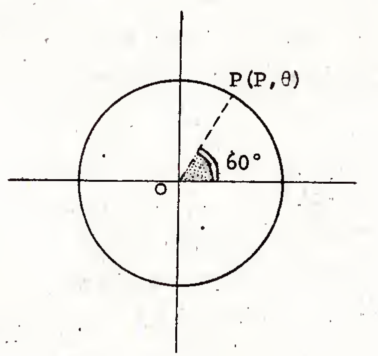
$$A = \frac{a^2}{4}\int_0^{\pi/3} d\theta + \frac{a^2}{4}\int_0^{\pi/3}\cos 2\theta d\theta$$

$$= \frac{a^2}{4}\int_0^{\pi/3} d\theta + \frac{a^2}{8}\int_0^{\pi/3}\cos 2\theta d(2\theta)$$

$$= \frac{a^2}{4}\left(\theta + \frac{1}{2}\text{sen}2\theta\right)_0^{\pi/3}$$

$$= \frac{a^2}{4}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 0.37a^2$$

$\rightarrow A = 0.37a^2$



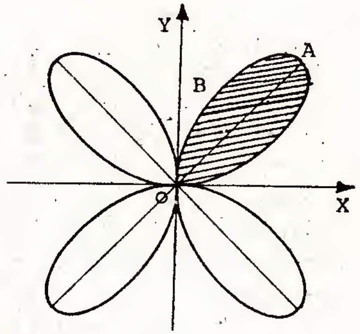
2.- Hallar el área total de la superficie limitada por la curva $\rho = a\text{sen}2\theta$

Solución.

La curva $\rho = a\text{sen}2\theta$ es simétrica con respecto al eje $\underline{OX}$ e $\underline{OY}$.

→ El área total será 4OAB cuyo límite de integración es:

$p = 0$ cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$



$$\rightarrow 4A = 2\int_0^{\pi/2} a^2\text{sen}^2 2\theta d\theta = 2a^2\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 2\theta d\theta$$

$u = 2\theta \rightarrow \frac{du}{2} = d\theta$

$$\rightarrow a^2\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 u du = a^2\int_0^{\pi/2} \frac{(1 - \cos 2u)}{2} du$$

$$\rightarrow 4A = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2} du - \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2} \cos 2u du = \frac{a^2}{2}\left[u - \frac{1}{2}\text{ sen } 2u\right]_o^{\pi/2}$$

$$4A = \frac{a^2}{2}\left[2\theta - \frac{1}{4}\text{ sen } 4\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{a^2}{2}\pi$$

$$\rightarrow 4A = \frac{a^2}{2}\pi$$

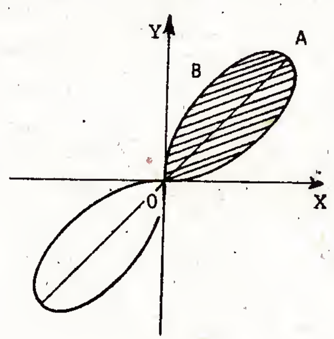
Calcular el área de la superficie encerrada por cada una de las siguientes curvas. .

3.- $\rho^2 = 4\text{ sen}2\theta$

Solución..

La curva $\rho^2 = 4\text{ sen}2\theta$ simétrica con respecto al eje Ox e Oy.

∴ El área será: 2OAB



Puesto que: $\rho = 0$ cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$ vemos que θ varía de 0 hasta $\frac{\pi}{2}$.

$$\rightarrow A = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(4\text{ sen}2\theta)d\theta = 2\int_0^{\pi/2} \text{sen}2\theta d\theta$$

$$A = \left[-\cos 2\theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$A = 2$$

$$\rightarrow A_T = 2A = 4$$

4.- $\rho = a\cos 3\theta$

Solución :

Por la gráfica de la fig. se ve que el área será 3OAB

→ Puesto que $\rho = o$ cuando $\theta = \frac{\pi}{6}$

→ θ varía desde 0 hasta $\frac{\pi}{6}$

$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} \rho^2 d\theta =$$

$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} a^2\cos^2\beta\theta d\theta$$

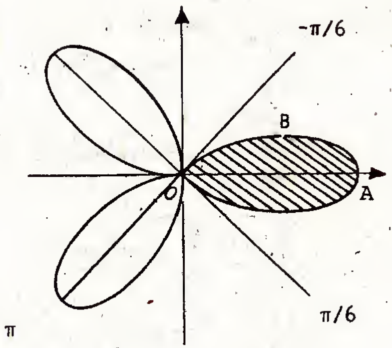
$$\frac{A}{2} = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/6} \cos^2 3\theta d\theta$$

$$\frac{A}{2} = \frac{a^2}{4}\int_0^{\pi/6} (1 + \cos 6\theta)d\theta$$

$$\frac{A}{2} = \frac{a^4}{4}\left[\theta + \frac{1}{6}\text{sen}6\theta\right]_0^{\pi/6} = \frac{a^2}{24}\pi$$

$$A = \frac{a^2}{12}$$

$$A_T = 3A = \frac{a^2\pi}{4}$$



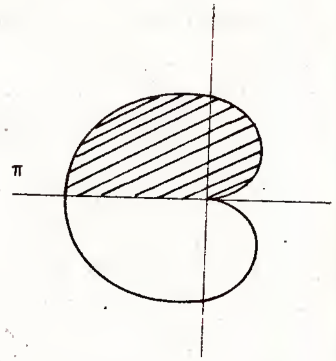
5. $\rho = a(1 - \cos\theta)$

Solución :

$\rho = 2a$, si $\theta = \pi$

$$\rightarrow A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1 - \cos\theta)^2 d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)d\theta$$



$$= \frac{a^2}{2}\left\{\int_0^{\pi} d\theta - 2\int_0^{\pi}\cos\theta d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1 + \cos 2\theta)d\theta\right\}$$

$$= \frac{a^2}{2}\left\{\int_0^{\pi} d\theta - 2\int_0^{\pi}\cos\theta d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} d\theta + \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cos 2\theta d(2\theta)\right\}$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\theta - 2\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\mathrm{sen}\,2\theta\right]_0^{\pi}$$

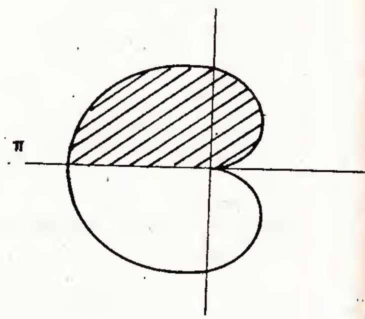
$$\rightarrow A = \frac{3a^2\pi}{4} \qquad \therefore A_T = 2A = \frac{3a^2\pi}{2}$$

6.- $\rho = 2 - \cos\theta$ $\qquad \rho = 3$ cuando $\theta = \pi$

Solución : $\rho = 3$ cuando $\theta = \pi$

$$\rightarrow A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(2 - \cos\theta)^2 d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(4 - 4\cos\theta + \cos^2\theta)d\theta$$



$$= 2\int_0^{\pi} d\theta - \int_0^{\pi} 2\cos\theta d\theta + \frac{1}{4}\int_0^{\pi}(1 + \cos 2\theta)d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi} d\theta - \int_0^{\pi} 2\cos\theta d\theta + \frac{1}{4}\int_0^{\pi} d\theta + \frac{1}{8}\int_0^{\pi}\cos 2\theta d(2\theta)$$

$$= \left[2\theta - 2\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{1}{4}\theta + \frac{1}{8}\mathrm{sen}\,2\theta\right]_0^{\pi}$$

$$\rightarrow A = \frac{9\pi}{4} \rightarrow A_T = 2A = \frac{9\pi}{2}$$

7. Calcular el área de la superficie encerrada por la siguiente curva :

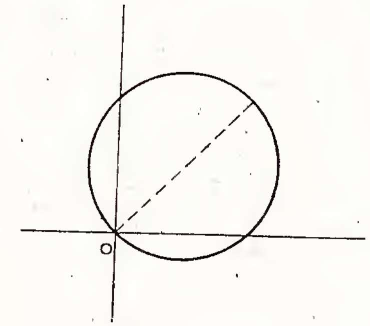
$\rho = a\cos\theta + b\,\mathrm{sen}\,\theta$

Solución :

$\rho = a$ cuando $\theta = 0°$

$\rho = b$ cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$

θ haciendo variar de 0 hasta π.



$$\rightarrow A = \int_0^{\pi}(a\cos\theta + b\,\mathrm{sen}\,\theta)d\theta$$

$$= a\int_0^{\pi}\cos\theta d\theta + b\int_0^{\pi}\mathrm{sen}\,\theta d\theta = \left[a\,\mathrm{sen}\,\theta - b\cos\theta\right]_0^{\pi}$$

$$\rightarrow A = b + a$$

8.- Hallar el área de la superficie limitada por la parábola $\rho = a/1+\cos\theta$ y las rectas $\theta = 0$ y $\theta = 120°$

Solución :

$$\rightarrow A = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi/3}\frac{d\theta}{(1 + \cos\theta)^2} = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi/3}\frac{d\theta}{1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta}$$

Haciendo la sustitución.

$$\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2} = t \ ; \ \cos\theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \ ; \ d\theta = \frac{2dt}{1 + t^2}$$

en la integral se tiene:

$$\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi/3}\frac{\frac{2dt}{1 + t^2}}{1 + \frac{2(1 - t^2)}{1 + t^2} + \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right)^2} = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi/3}\frac{2(1 + t^2)^2 dt}{4(1 + t^2)}$$

$$= \frac{a^2}{4}\int_0^{2\pi/3}(1 + t^2)dt = \frac{a^2}{8}\left[t + \frac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi/3}$$

pero: $tg\,\frac{\theta}{2} = t$

$$\to = \frac{a^2}{4}\left[tg\,\frac{\theta}{2} + \frac{tg^3\,\frac{\theta}{2}}{3}\right]_0^{2\pi/3} = \frac{a^2}{4}\left[1.73205 + 1.73205\right]$$

$$\to A = 0.866025a^2$$

9.- Hallar el área de la superficie limitada por la hipérbola $\rho^2\cos 2\theta = a^2$ y las rectas $\beta = 0$ y $\theta = 30°$

Solución :

$$\to A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} \frac{a^2 d\theta}{\cos 2\theta} = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/6} \sec 2\theta d\theta = \frac{a^2}{4}\int_0^{\pi/6} \sec 2\theta d(2\theta) =$$

$$= \frac{a^2}{4}\left[\ln(\sec 2\theta + tg 2\theta)\right]_0^{\pi/6}$$

$$= \frac{a^2}{4}\ln(2 + \sqrt{3}) = 0.32924a^2$$

$$\to A = 0.32924\, a^2$$

10. Hallar el área de parte de la parábola $\rho = a\sec^2\frac{\theta}{2}$ que es interceptada entre la curva y el lado recto. o sea la cuerda trazada por el foco perpendicular al eje de simetría.

Solución

$$\rho = a\sec^2\frac{\theta}{2} = \frac{a}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{a}{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \frac{2a}{1+\cos\theta}$$

$$\to A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{4a^2 d\theta}{(1+\cos\theta)^2} = 2a^2\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1+\cos\theta)^2}$$

$$= 2a^2\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1+\cos\theta)^2} = a^2\int_0^{\pi/2}$$

$$A = 2a^2\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1+\cos\theta)^2} = a^2\left[tg\,\frac{\theta}{2} + \frac{tg^3\,\frac{\theta}{2}}{3}\right]_0^{\pi/2} =$$

$$A = a^1[1 + \frac{1}{3}] = \frac{4}{3}a^2$$

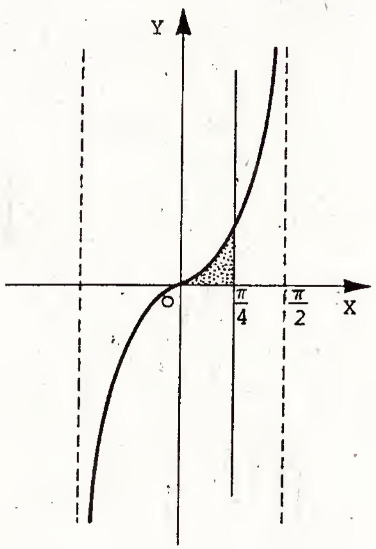
$$\to A = \frac{4}{3}a^2$$

$$\to A_T = 2A = \frac{8}{3}a^2$$

Hallar el área de las sueprficies limitadas por las siguientes curvas y las rectas dadas.

11. $\rho = tg\theta$; $\theta = 0$, $\theta = \frac{1}{4}\pi$

Solución :



$$\to A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} tg^2\theta d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} (\sec^2\theta - 1)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \sec^2\theta d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[tg\theta - \theta\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}(1 - \frac{\pi}{4})$$

$$A = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$$

12. $\rho = \sec\theta + tg\theta$; $\theta = 0$; $\theta = \frac{1}{4}\pi$

Solución :

$$\to A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} (\sec\theta + tg\theta)^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} (\sec^2\theta + 2\sec\theta\, tg\theta + tg^2\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \sec^2\theta + \int_0^{\pi/4} \sec\theta tg\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} tg^2\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \sec^2\theta d\theta + \int_0^{\pi/4} \sec\theta tg\theta d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \sec^2\theta d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{2} tg\theta + \sec\theta + \frac{1}{2} tg\theta - \frac{1}{2}\theta\right]_0^{\pi/4}$$

$$A = \sqrt{2} - \frac{\pi}{8}$$

Calcular el área que tiene en común cada uno de las siguientes pares de curvas.

13. $\rho = 3\cos\theta$; $\rho_1 = 1 + \cos\theta$.

Solución :

El área OAB consta de 2 partes: una barrida por el radio vector $\rho = 1 + \cos\theta$; θ varía de 0 hasta $\pi/3$ y

$\rho = 3\cos\theta$; θ varía de $\pi/3$ hasta $\pi/2$.

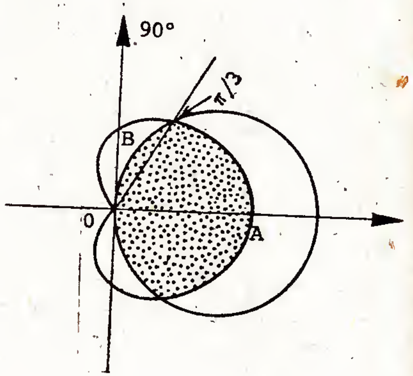
$$\to \text{El } A = 2OAB = 2 \times \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} (1+\cos\theta)^2 d\theta + 2\times\frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2} 9\cos^2\theta d\theta$$

$$A = \int_0^{\pi/3} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) d\theta + \frac{9}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta) d\theta$$

$$A = \int_0^{\pi/3} d\theta + 2\int_0^{\pi/3} \cos\theta d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} d\theta + \frac{1}{4}\int_0^{\pi/3} \cos 2\theta d(2\theta) +$$

$$+ \frac{9}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2} d\theta + \frac{9}{4}\int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos 2\theta d(2\theta)$$

$$\to A = \left[\theta + 2\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen}2\theta\right]_0^{\pi/3} + \left[\frac{9}{2}\theta + \frac{9}{4}\operatorname{sen}2\theta\right]_{\pi/3}^{\pi/2}$$



$$= \frac{\pi}{3} + \sqrt{3} + + \frac{\pi}{6} + \frac{1}{8}\sqrt{3} + \frac{9}{4}\pi - \frac{9}{6}\pi - \frac{9}{8}\sqrt{3}$$

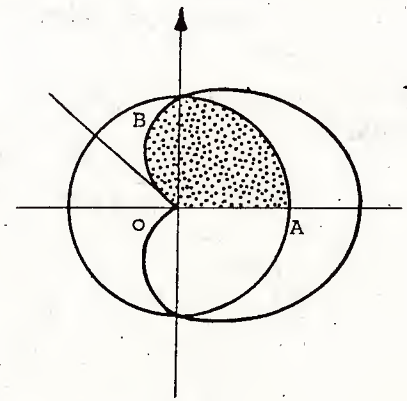
$$\to A = \frac{5}{4}\pi$$

14. $\rho = 1 + \cos\theta$; $\rho_1 = 1$

Solución :

El área OAB consta de 2 partes una barrida por el radio vector: $\rho = 1$ al variar θ de 0 hasta $\frac{\pi}{2}$ y la otra barrida por $\rho = 1 + \cos\theta$ al variar θ desde $\pi/2$ hasta π.

$$\therefore A = 2OAB = 2 \times \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta + 2 \times \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} (1+\cos\theta)^2 d\theta$$



$$= \int_0^{\pi/2} d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta + 2\int_{\pi/2}^{\pi} \cos\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} d\theta + \frac{1}{4}\int_{\pi/2}^{\pi} \cos 2\theta d(2\theta)$$

$$= \theta\Big]_0^{\pi/2} + \left.\theta + 2\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen}2\theta\right]_{\pi/2}^{\pi}$$

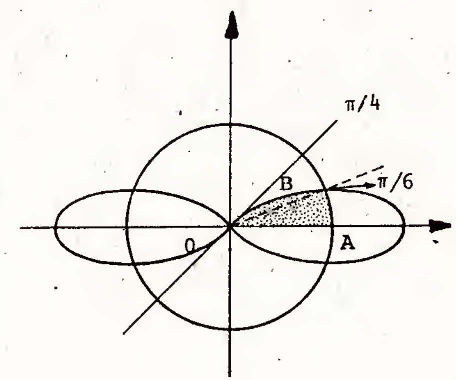
$$A = \frac{\pi}{2} + \pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - 2 - \frac{\pi}{4}$$

$$A = \frac{5\pi}{4} - 2$$

15. $\rho^2 = 2\cos 2\theta$; $\rho = 1$

Solución :

El área de OAB consta de 2 partes: una barrida por el radio vector: $\rho = 1$ al variar θ de 0 hasta $\pi/6$ y la otra barrida por:



$\rho = 2\cos 2\theta$

donde θ varía de $\pi/6$ hasta $\pi/4$.

→ Area: $A = 4OAB = 2\int_0^{\pi/6} d\theta + 4\int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos 2\theta\, d\theta$

$$= 2\theta\Big]_0^{\pi/6} + \Big[2 \operatorname{sen} 2\theta\Big]_{\pi/6}^{\pi/4}$$

$$A = \frac{\pi}{3} + 2 - \sqrt{3}$$

16. $\rho^2 = \cos 2\theta$; $\rho^2 = \operatorname{sen} 2\theta$

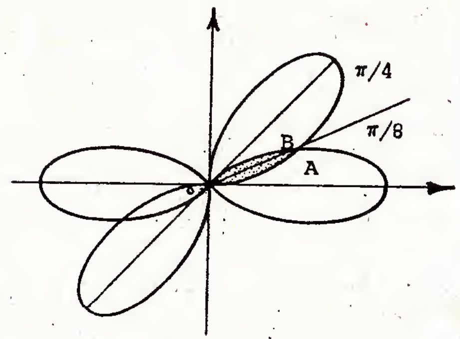
Solución :

$$A = 2OAB = 2 \times \frac{1}{2}\int_0^{\pi/8} \operatorname{sen} 2\theta\, d\theta + 2\times \frac{1}{2}\int_{\pi/8}^{\pi/4} \cos 2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/8} \operatorname{sen} 2\theta\, d(2\theta) + \frac{1}{2}\int_{\pi/8}^{\pi/4} \cos 2\theta\, d(2\theta)$$

$$= \Big[-\frac{1}{2}\cos 2\theta\Big]_0^{\pi/8} +$$

$$+ \Big[\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\Big]_{\pi/8}^{\pi/4}$$



$$A = -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

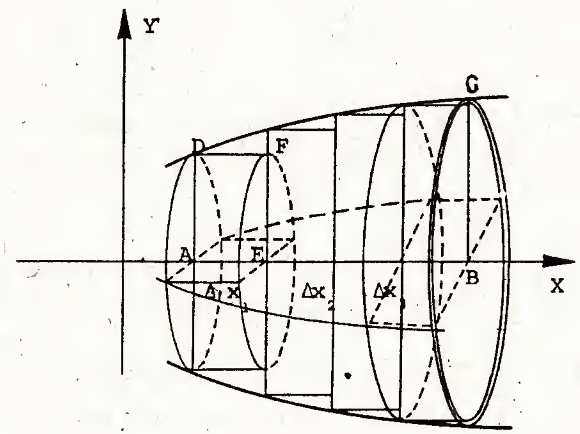
$$A = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Sea V el volumen del sólido engendrado haciendo girar el recinto plano ABCD alrededor del eje x, siendo la ecuación de la curva plana DC:

$$y = f(x)$$

1er Paso: dividir el segmento AB en n partes cuya longitud sea: Δx_1, Δx_2, ...Δx_n y hacer pasar por c/punto de división con plano, perpendicualr al eje x, estos planos dividen al sólido en n placas circulares.

Si dentro del recinto ABCD se construye rectángulo de base Δx_1, Δx_2, ... Δx_n, entonces c/rectángulo engendra un cilindro de revolución cuando el recinto ABCD se hace girar.



asi se forma un cilindro correspondiente a cada una de las placas circulares. El límite de la suma de estos n cilindros ($n \to \infty$) es el volumen buscado.

2do Paso:

Sean y_1, y_2, ... y_n las ordenadas de la curva DC en los puntos de división en el eje x. Entonces el volumen del cilindro

engendrado por el rectángulo AEFD será: $\pi y_1^2 \Delta x_1$, y la suma de estos volúmenes de todo estos cilindros es:

$$\pi y_1^2 \Delta x_1 + \pi y_2^2 \Delta x_2 + \dots + \pi y_n^2 \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} \pi y_i^2 \Delta x_i$$

3er paso.

Aplicando el teorema fundamental (empleando los límites:

$OA = a, \quad OB = b$)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi y_i^2 \ \Delta x_i = \int_a^b \pi y^2 dx \qquad (I)$$

Por tanto:

1) El volumen que se engendra haciendo girar alrededor del eje x la superficie limitada por la curva, el eje de las x cuya ordenadas es $x = a$, $x = b$ es:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx \qquad (II)$$

2) cuando OY es el eje de revolución empleamos la fórmula:

$$V_y = \pi \int_a^b x^2 dy$$

Si las ecuaciones de la curva CD se dan en forma paramétrica:

$$x = f(t) \ ; \ y = \phi(t),$$

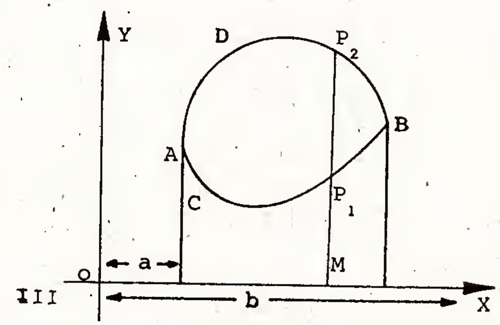
Entonces en (I) se debe sustituir los valores

$y = \phi(t)$, $dx = f'(t)dt$ y cambiar los límites en t_1 y t_2.

Si $t = t_1$ cuando $x = a$; $t = t_2$ cuando $x = b$.

Cuando una superficie plana gira alrededor de un eje en en el mismo plano, y este eje no corta a la superficie se forma un sólido de revolución hueco.

Por tanto cuando gira alrededor del eje x;



$$V_x = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx \qquad III$$

y si gira alrededor del eje y:

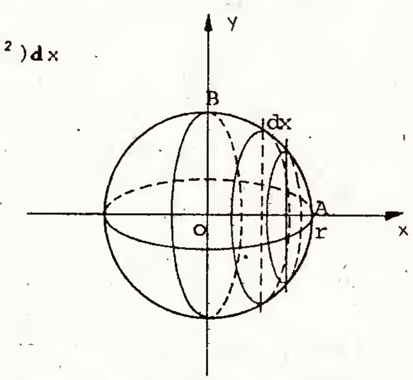
$$V_y = 2\pi \int_a^b (y_2 - y_1) x dx$$

PROBLEMAS:

1.- Hallar el volumen de la esfera que se engendra haciendo girar el círculo $x^2 + y^2 = r^2$ alrededor de un diámetro:

Solución.

El volumen será 2 veces el volumen engendrado por OAB



$$\rightarrow \quad V_x = 2\pi \int_0^r y^2 dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx$$

$$= 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r$$

$$= 2\pi \left[r^3 - \frac{r^3}{3} \right]$$

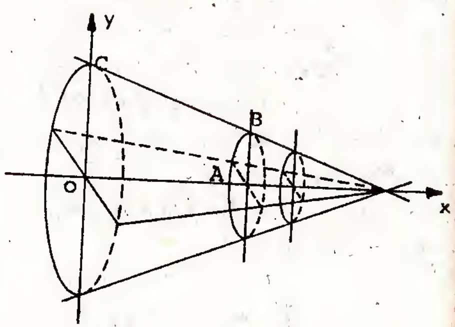
$$V_x = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

2.- Hallar por integración el volumen del cono truncado que se engendra haciendo girar alrededor de Ox. La superficie limitada por las rectas.

$y = 6 - x$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 4$

Solución :

El volumen será:



→ $V_x = \pi\int_0^4 (6-x)^2dx =$

$$= \pi\int_0^4 (36-12x+x^2)dx$$

$$V_x = \pi\left[36x - 6x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_0^4$$

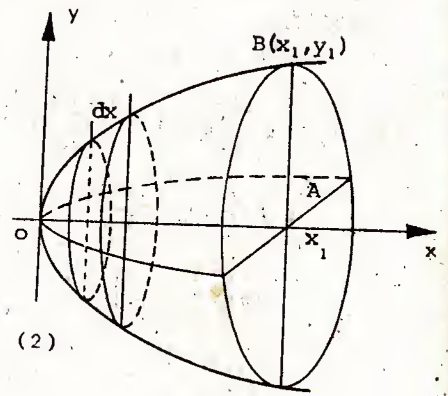
$$= 69.3333\pi$$

→ $V_x = 217.817$

3.- Hallar el volumen del paraboloide de revolución cuya superficie se engendra haciendo alrededor de su eje el arco de la parábola $y^2 = 2px$, comprendido entre el origen y el punto (x_1, y_1).

Solución.

El volumen engendrado por OAB será



→ $V_x = \pi\int_0^{x_1} 2pxdx = \pi px^2\Big]_0^{x_1}$

$V_x = \pi p x_1^2$ ...... (1)

puesto que la parábola pasa por el punto (x_1,y_1)

→ $y_1^2 = 2px_1$ → $p = \frac{1}{2}\frac{y_1^2}{x_1}$ .... (2)

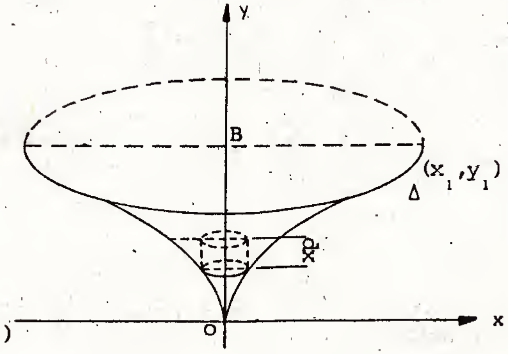
Sustituyendo (2) en (1)

$$V_x = \frac{1}{2}\pi y_1^2 x_1$$

4.- Hallar el volumen del sólido engendrado haciendo girar alrededor de Oy el arco de la parábola $y^2 = 2px$

Solución :

El volumen engendrado por OAB será:



$$V_y = \pi\int_0^{y_1} x^2dy$$

$$V_y = \pi\int_0^{y_1}\frac{y^4}{4p^2}dy$$

$$= \frac{\pi}{4p^2}\int_0^{y_1} y^4dx$$

$$V_y = \frac{\pi y^5}{20p^2}\Big]_0^{y_1} = \frac{\pi y_1^5}{20p^2} \quad ..(1)$$

pero: como la parábola pasa por el punto (x_1,y_1) se tiene

$y_1^2 = 2px_1 = p = \frac{y_1^2}{2x_1}$ → $p^2 = \frac{y_1^4}{4x_1^2}$ ...(2)

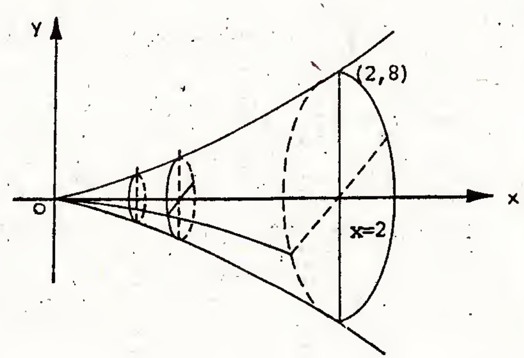
→ sustituyendo (2) en (1) se tiene que:

$$V_y = \frac{\pi}{5}x_1^2y_1$$

Hallar el volumen del sólido engendrado haciendo girar alrededor de Ox la superficie limitada por las siguientes lugares geométricos.

5.- $y = x^3$; $y = 0$, $x = 2$

Solución :



$V_x = \pi\int_0^2 x^6dx =$

$= [\frac{\pi}{7}x^7]^2$

$= \frac{128}{7}\pi$

6.- $ay^2 = x^3$; $y = 0$; $x = a$

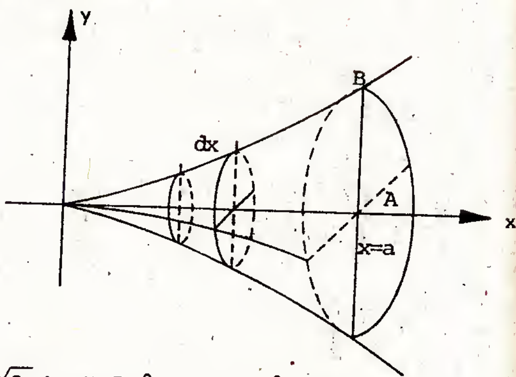
Solución

El volumen engendrado por OAB será:

$$V_x = \pi\int_0^a \left(\frac{x^{3/2}}{a}\right)^2 dx$$

$$V_x = \pi\int_0^a \frac{x^3}{a^2}\, dx$$

$$V_x = \pi\left[\frac{x^4}{4a^2}\right]_0^a = \frac{1}{4}\pi a^2$$



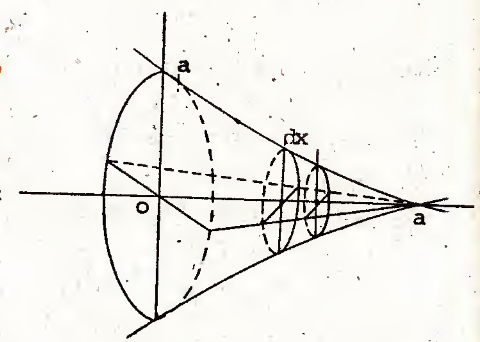
7.- La parábola $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$; $x = 0$; $y = 0$

Solución :

$$V_x = \pi\int_0^a (a - 2\sqrt{ax} + x)^2 dx$$

$$V_x = \pi\int_0^a (a^2 - 4a^{3/2}x^{1/2} +$$

$$+ 6ax - 4x^{3/2}a^{1/2} + x^2)dx$$



$$V_x = \pi\left[a^2x - \frac{8}{3}a^{3/2}x^{3/2} +\right.$$

$$\left. + 3ax^2 - \frac{8x^{5/2}}{5}a^{1/2} + \frac{x^3}{3}\right]_0^a$$

$$V_x = \pi\left[a^3 - \frac{8}{3}a^3 + 3a^3 - \frac{8}{5}a^3 + \frac{a^3}{3}\right]$$

$$\rightarrow V_x = \frac{\pi a^3}{15}$$

8.- La hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

Solución.

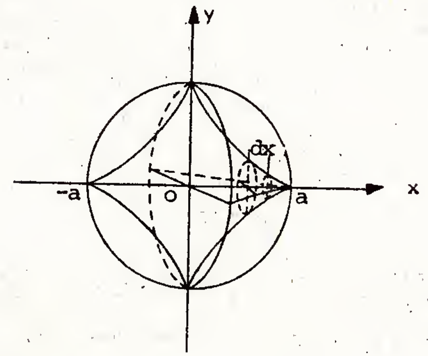
$$\rightarrow V_x = 2\pi\int_0^a (a^{2/3} - x^{2/3})^3 dx = 2\pi\int_0^a (a^2 - 3a^{4/3}x^{2/3} + 3a^{2/3}x^{4/3} - x^2)$$

$$V_x = 2\pi\left[a^2x - \frac{9}{5}a^{4/3}x^{5/3} + \frac{9}{7}a^{2/3}x^{7/3} - \frac{x^3}{3}\right]_0^a$$

$$V_x = 2\pi\left[a^3 - \frac{9}{5}a^3 + \frac{9}{7}a^3 - \frac{a^3}{3}\right]$$

$$V_x = 2\pi\left[\frac{105a^3 - 189a^2 + 135a^2 - 35a^3}{105}\right]$$

$$\rightarrow V_x = \frac{32}{105}\pi a^3$$



9.- Una arcada de $y = \text{sen}x$

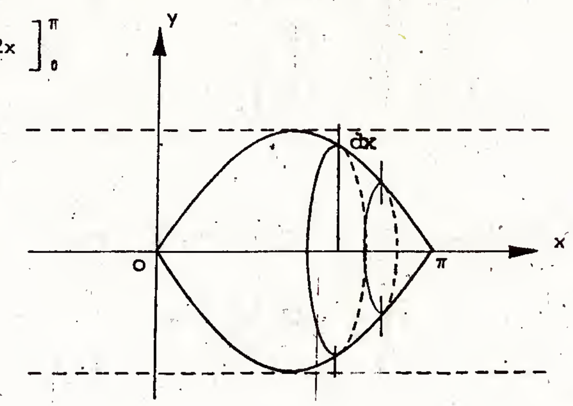
Solución :

$$V_x = \pi\int_0^\pi \text{sen}^2 x\,dx = \pi\int_0^\pi \frac{(1 - \cos 2x)}{2}\,dx$$

$$V_x = \frac{\pi}{2}\left\{\int_0^\pi dx - \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos 2x\,d(2x)\right\}$$

$$V_x = \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{1}{2}\text{sen}2x\right]_0^\pi$$

$$V_x = \frac{\pi^2}{2}$$



10. $y = e^{-x}$; $y = 0$, $x = 0$, $x = 5$

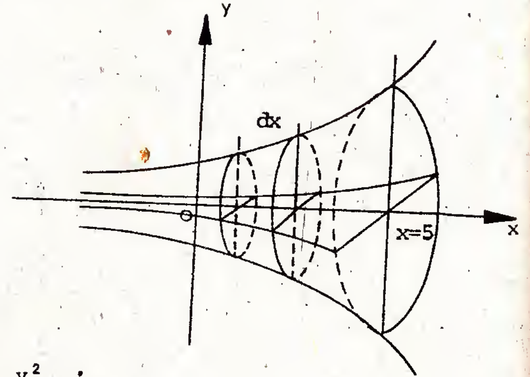
Solución :

$$\to V_x = \pi\int_0^5 e^{-2x}dx = -\frac{\pi}{2}\int_0^5 e^{-2x}d(-2x)$$

$$V_x = -\frac{\pi}{2}\left[e^{-2x}\right]_0^5$$

$$= -\frac{\pi}{2}\{e^{-10} - 1\}$$

$$V_x = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-10})$$



11. $9x^2 + 16y^2 = 144 = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

Solución :

Ya que $y^2 = \frac{9}{16}(16 - x^2)$; y el volumen es dos veces el volumen engendrado por OAB. Tenemos:

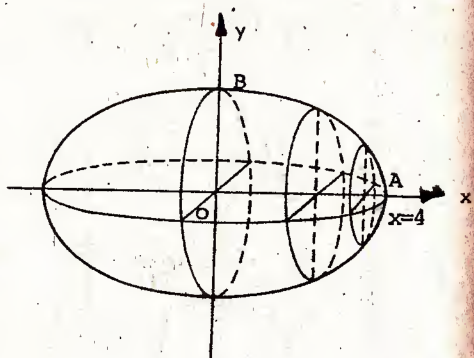
$$\frac{V_x}{2} = \pi\int_0^4 \frac{9}{16}(16 - x^2)dx$$

$$V_x = 2\pi\int_0^4 \frac{9}{16}(16-x^2)dx$$

$$V_x = \frac{18}{16}\pi\int_0^4 (16 - x^2)dx$$

$$V_x = \frac{18}{16}\pi\left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = 48\pi$$

$$V_x = 48\pi$$



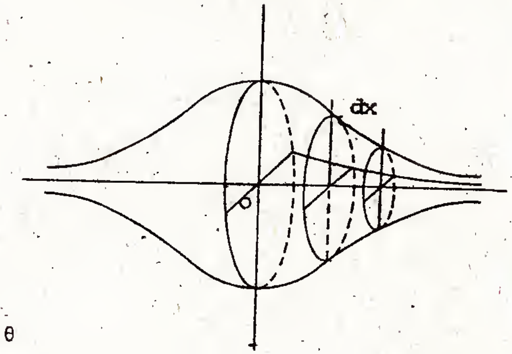
12. La bruja $(x^2 + 4a^2)y = 8a^3$, $y = 0$

Solución :

$$\to \frac{V_x}{2} = \pi\int_0^\infty \frac{64a^6}{(x^2 + 4a^2)^2}dx .$$

$$\frac{V_x}{2} = 64a^6\pi\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + 4a^2)^2}$$

$$= 4a^2\pi\int_0^\infty \frac{dx}{((\frac{x}{2a})^2 + 1)^2}$$



Haciendo la sustitución

$$tg\theta = \frac{x}{2a} \to dx = 2a\sec^2\theta d\theta$$

y los límites de integración será:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ cuando } x = \infty$$

$$\theta = 0 \quad '' \quad x = 0$$

→ En la integral se tiene:

$$4a^2\pi\int_0^{\pi/2} \frac{2a\sec^2\theta d\theta}{(tg^2\theta+1)^2} = 8a^3\pi\int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2\theta d\theta}{\sec^4\theta} = 8a^3\pi\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sec^2\theta}$$

$$= 8a^3\pi\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta d\theta$$

$$\to \frac{V_x}{2} = 8a^3\pi\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right)d\theta = 4a^3\pi\left[\int_0^{\pi/2} d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos 2\theta d(2\theta)\right]$$

$$\frac{V_x}{2} = 4a^3\pi\left[\theta + \frac{1}{2}\text{sen}2\theta\right]_0^{\pi/2}$$

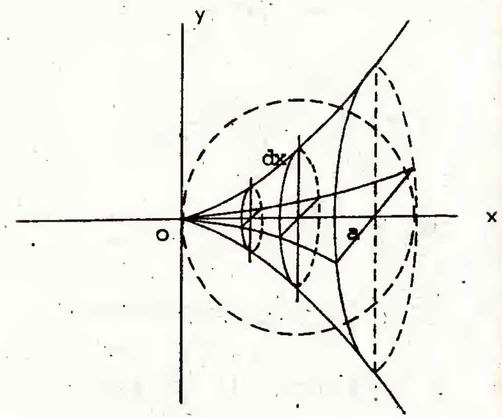
$$\frac{V_x}{2} = 2a^3\pi^2 \to V_x = 4a^3\pi^2$$

13. $y^2(2a - x) = x^3$; $y = 0$, $x = a$

Solución :

→ $V_x = \pi\int_0^a \frac{x^3dx}{2a - x}$

$= -\pi\int_0^a \frac{x^3dx}{x-2a}$



puesto que $V_x > 0$;

siempre:

→ intercambiamos los límites de integración y se tiene:

$$V_x = \pi\int_a^0 \frac{x^3dx}{x-2a}$$

$$V_x = \pi\int_a^0 (x^2 + 2ax + 4a^2 + \frac{8a^3}{x-2a})dx$$

→ $V_x = \pi\{\int_a^0 (x^2 + 2ax + 4a^2)\,dx + 8a^3\int \frac{dx}{x-2a}\}$

$$= \pi\left[\frac{x^3}{3} + ax^2 + 4a^2x + 8a^3\ln(x-2a)\right]_a^0$$

→ $V_x = \pi\{8a^3\ln(-2a) - \frac{a^3}{3} - 5a^3 - \ln(-a)\}$

$$V_x = \pi\{8a^3\ln 2 - \frac{16}{3}a^3\}$$

$$V_x = 0.2118\pi a^3$$

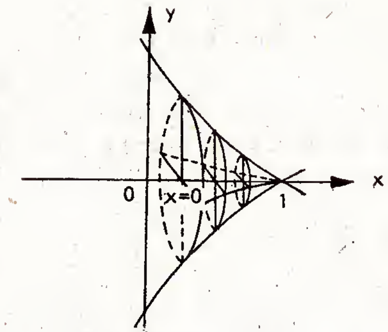
14. $y^2 = (2-x)^3$; $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$

Solución :

→ $V_x = \pi\int_0^1 (2-x)^3dx = \pi\int_0^1 (8 - 12x + 6x^2 - x^3)dx$

$$V_x = \pi\left[8x - 6x^2 + 2x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$V_x = 3.75\pi$

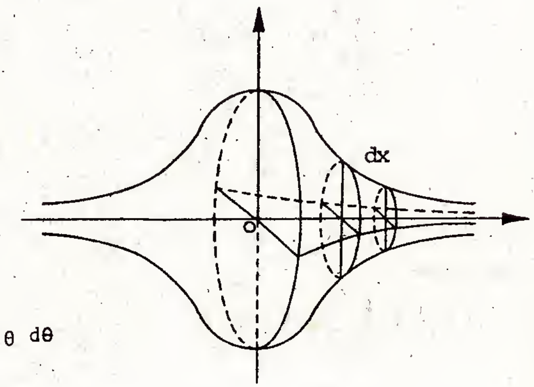


15. $y^2(4 + x^2) = 1$; $y = 0$; $x = 0$; $x = \infty$

Solución

→ $V_x = \pi\int_0^\infty \frac{dx}{4+x^2}$

$V_x = \frac{\pi}{4}\int \frac{dx}{1+(\frac{x}{2})^2}$



Haciendo la sustitución.

$\frac{x}{2} = tg\theta$ → $dx = 2\sec^2\theta\,d\theta$

Los límites de integración será cuando $x = \infty$; $\theta = \frac{\pi}{2}$

$x = 0$; $\theta = 0$

→ En la integral se tiene:

$$V_x = \frac{\pi}{4}\int_0^{\pi/2}\frac{2\sec^2\theta d\theta}{1+tg^2\theta} = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\sec^2\theta d\theta}{\sec^2\theta} = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2}\left[\theta\right]_0^{\pi/2}$$

→ $V_x = \frac{\pi^2}{4}$

Hallar el volumen del sólido que se engendra haciendo girar alrededor de Oy, La superficie limitada por los siguientes lugares geométricos.

16. $y = x^3$; $y = 0$, $x = 2$

Solución :

Cuando el rectángulo genérico gira alrededor del eje Y, se produce placas circulares cuyo volumen es igual a la diferencia entre los volúmenes generados al girar los rectángulos ECDF de dimensión 2 por dy, y EABF de dimensión x por dy con respecto al eje y es decir el volumen será:

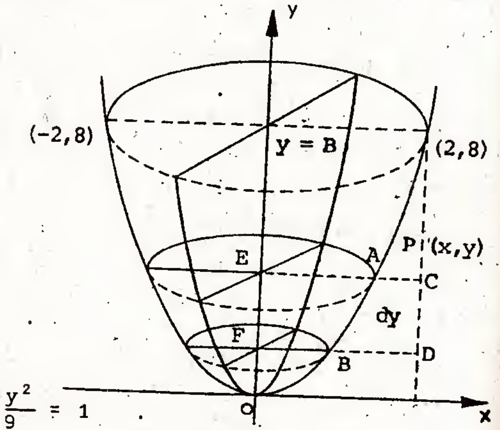
$$V_y = \int_0^8 4\pi dy - \int_0^8 \pi x^2 dy$$

$$\rightarrow V_y = \pi\int_0^8 (4 - x^2)dy$$

$$= \pi\int_0^8 (4 - y^{2/3})dy$$

$$= \pi\left[4y - \frac{3}{5}y^{5/3}\right]_0^8$$

$$V_x = \pi\left[32 - \frac{96}{5}\right] = \frac{64}{5}\pi$$



17. $9y^2 + 16y^2 = 144 \equiv \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

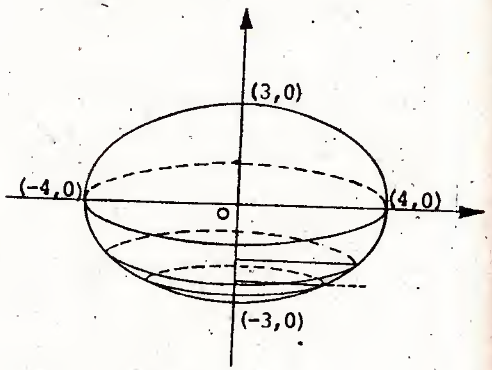
Solución :

$$V_y = 2\pi\int_0^3 \frac{16}{9}(9-y^2)dy$$

$$V_y = \frac{32}{9}\pi\int_0^3 (9 - y^2)dy$$

$$V_y = \frac{32}{9}\pi\left[9y - \frac{y^3}{3}\right]_0^3$$

$$V_y = 64\pi$$



18. $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^{2/3} = 1$

Solución.

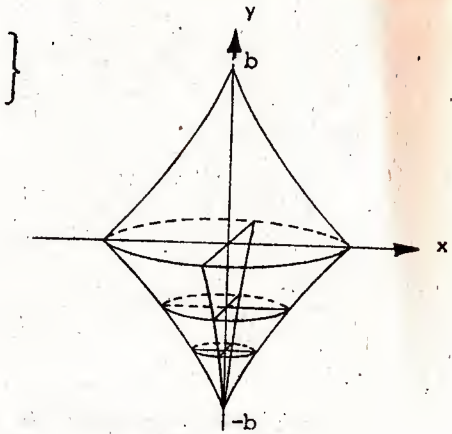
$$V_y = 2\pi\int_0^b a^2\left[1 - (\frac{y}{b})^{2/3}\right]dy$$

$$V_y = 2\pi a^2\left\{\int_0^b dy - \frac{1}{b^{2/3}}\int_0^b y^{2/3}dy\right\}$$

$$= 2\pi a^2\left[y - \frac{3y^{5/3}}{5b^{2/3}}\right]_0^b =$$

$$= 2\pi a^2 (b - \frac{3}{5}b)$$

$$V_y = \frac{4}{5}\pi a^2 b.$$



19. $x^2 = 16 - y$; $y = 0$

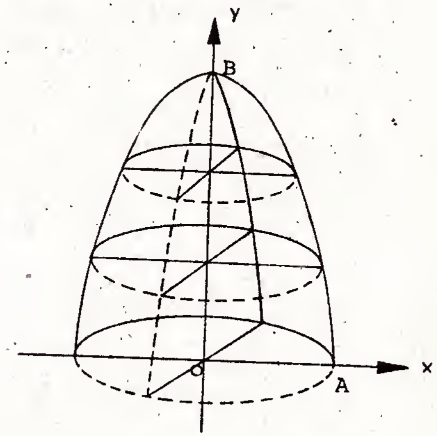
Solución.

→ Volumen engendrado por OAB será alrededor OY será:

$$V_y = \pi\int_0^{16} (16 - y)dy$$

$$V_y = \pi\left[16y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{16}$$

$$V_y = 128\pi$$



20. La ecuación de la curva OA de la figura (*) es $y^2 = x^3$, Hallar el volumen del sólido que se engendra cuando la superficie.

(a) OAB gira alrededor de OX

(b) OAB gira alrededor de AB

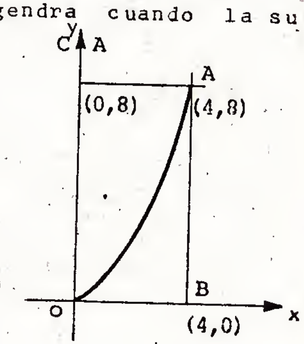
(c) OAB gira alrededor de CA

(d) OAB gira alrededor de OY

(e) OAC gira alrededor de OY

(f) OAC gira alrededor de CA

Fig. (*)



(g) OAC gira alrededor de AB

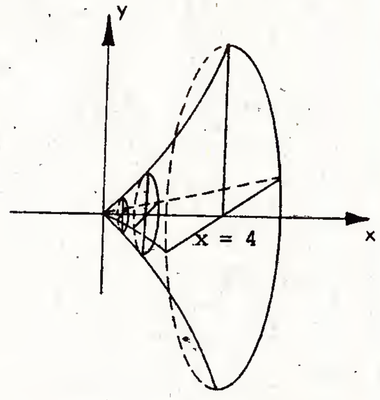
(h) OAC gira alrededor de OX

Solución.

a)

$$V_x = \pi\int_0^4 x^3dx = \pi\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^4$$

$$V_x = 64\pi$$



b) OAB gira alrededor de AB:

El volumen pedido será:

Dividiendo el área mediante franjas horizontales, cuando el rectángulo genérico de la fig. gira alrededor del eje Y se produce placas circulares **de radio 4-x; de altura dy y de volumen** $\pi(4-x)^2dy$

→ El volumen pedido será

$$V_y = \pi\int_0^8 (4-x)^2dy$$

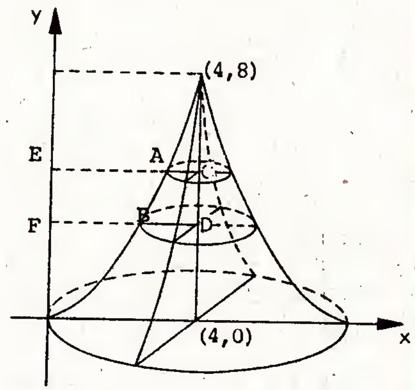
$$= \pi\int_0^8 (4-y^{2/3})^2dy$$

$$\to V_y = \pi\int_0^8 (16-8y^{2/3}+y^{4/3})dy$$

$$V_y = \pi\left[16y - \frac{24}{5}y^{5/3} + \frac{3}{7}y^{7/3}\right]_0^8$$

$$= \frac{1024}{35}\pi$$

$$\to V_y = \frac{1024}{35}\pi$$



d) OAB gira alrededor de OY.

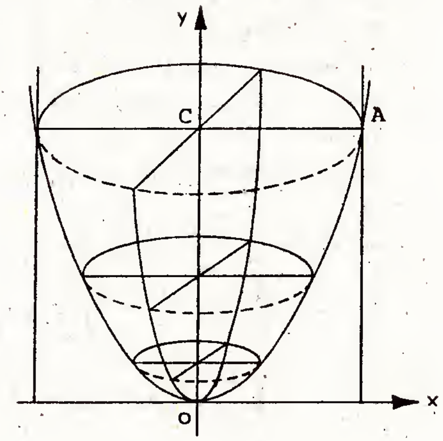
$$V_{OAC} = \int_0^8 (16\pi - \pi x^2)dy$$

$$V_{OAC} = \pi\int_0^8 (16 - x^2)dy =$$

$$= \pi\int_0^8 (16 - y^{4/3})dy$$

$$V_{OAC} = \pi\left[16y - \frac{3}{7}y^{7/3}\right]_0^8$$

$$V_{OAC} = \frac{512}{7}\pi$$



f) OAC gira alrededor de CA

Dividiendo el área mediante franjas horizontales, cuando el rectángulo genérico de la fig. gira alrededor del eje X se produce placas circulares de radio 8 - y, de altura dx y de volumen.

$\pi(8-y)^2dy$

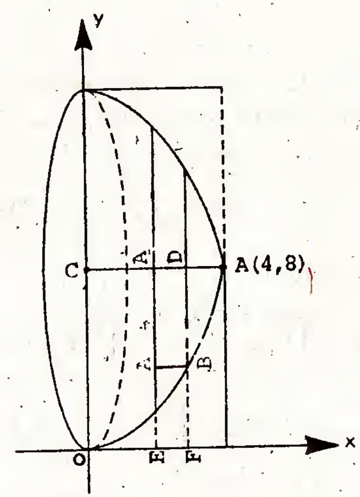
$$\to V_{OAC} = \int_0^4 \pi(8-y)^2dx$$

$$= \pi\int_0^4 (8 - x^{3/2})^2$$

$$V_{OAC} = \int_0^4 (64-16x^{3/2}+x^3)dx$$

$$\to V_{OAC} = \pi\{64\int_0^4 dx - 16\int_0^4 x^{3/2}dx + \int_0^4 x^3dx\}$$

$$V_{OAC} = \pi\left[64x - \frac{32}{5}x^{5/2} + \frac{x^4}{4}\right]_0^4 \to V_{OAC} = \frac{576}{5}\pi$$

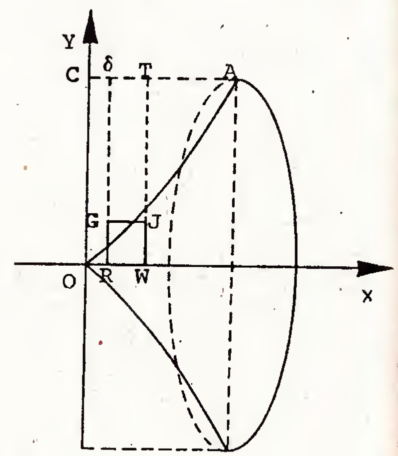


h) OAC gira alrededor de OX.

El rectángulo genérico al girar alrededor de OX se produce placas circulares cuyo volumen es igual a la diferencia entre los volúmenes generadas al girar. Los rectángulos.

RSTW de dimensión 8 por dx y RGJW de dimensión y por dx

es decir el volumen será:



$$V_{OAC} = \pi\int_0^4 64\ dx - \pi\int_0^4 x^3 dx$$

$$V_{OAC} = \pi\int_0^4 (64 - x^3)dx$$

$$V_{OAC} = \pi\left[64x - \frac{x^4}{4}\right]_0^4$$

$$\rightarrow\ V_{OAC} = 192\pi$$

21. Hallar el volumen del esferoide achatado que se engendra haciendo girar alrededor del eje de las y la superficie limitada por la elipse:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

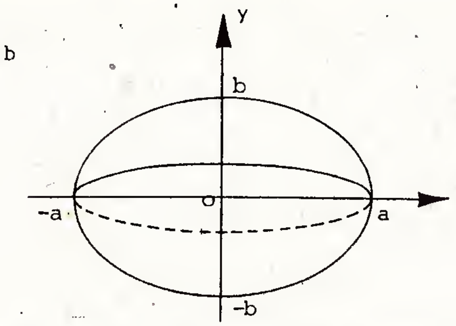
Solución.

$$\rightarrow\ \frac{V_y}{2} = \int_0^b \pi x^2 dy = 2\pi\int_0^b \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)dx$$

$$V_y = \frac{2a^2}{b^2}\pi\int_0^b (b^2 - y^2)dx$$

$$V_y = 2\frac{a^2}{b^2}\pi\left[b^2y - \frac{y^3}{3}\right]_0^b$$

$$\rightarrow\ V_y = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$



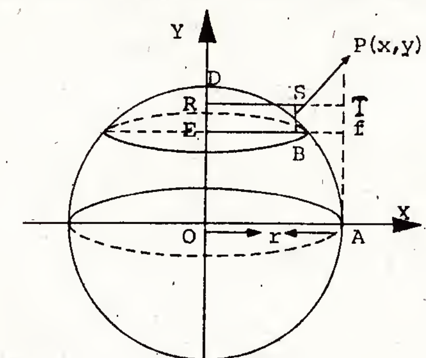
22. De una esfera de radio r se corta un segmento de una base de espesor h, demostrar por integración que su volumen es:

$$\frac{\pi h^2(3r - h)}{3}$$

Solución.

Sea la ecuación de la esfera $x^2 + y^2 = r^2$.

al girar el rectángulo genérico alrededor de OY, se produce placas circulares cuyo volumen es igual a la diferencia entre los volúmenes generados al girar el rectángulo RTFE de dimensión r por dx y RSBE de dimensión r - x.



Hallar el volumen del sólido que se engendra haciendo girar alrededor de c/u de las siguientes rectas la superficie que corta la curva correspondiente.

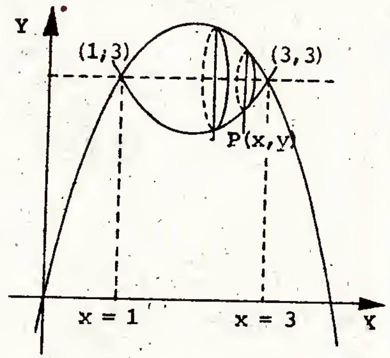
23. $y = 3$, $y = 4x - x^2$

Solución :

El volumen pedido será:

$$dv = \pi r^2 h \quad \text{donde:} \quad r = (3 - r)^2\ ;\ h = dx$$

$$\rightarrow \quad V_x = \pi\int_1^3 (3 - y)^2dx$$



$$V_x = \pi\int_1^3 (x^2 - 4x + 3)^2dx$$

$$V_x = \pi\int_1^3 (x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 9)dx$$

$$V_x = \pi\left[\frac{x^5}{5} - 2x^4 + \frac{22x^3}{3} - 12x^2 + 9x\right]_1^3$$

$$V_x = \frac{16}{15}\pi$$

24. $y = -4$; $y = 4 + 6x - 2x^2$

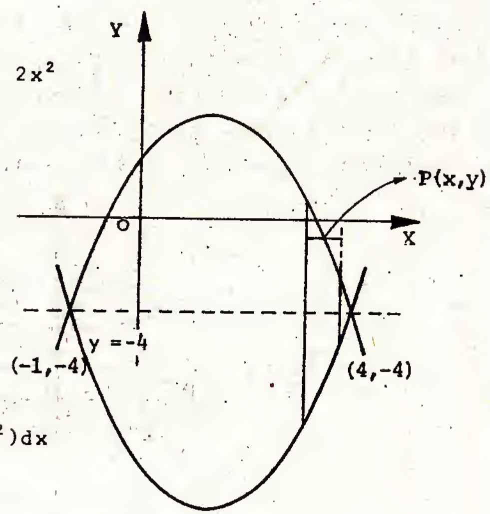
Solución

El volumen pedido será:

$d(V) = \pi r^2h = \pi r^2dx$

donde:

$r = 4 + y,\ h = dx$



$$\rightarrow \quad V_x = \pi\int_{-1}^{4} (4+x)^2dx$$

$$V_x = \pi\int_{-1}^{4} (8 + 6x + 2x^2)dx$$

$$V_x = \pi\int_{-1}^{4} (64 + 96x + 4x^2 - 24x^3 + 4x^4)dx$$

$$V_x = 4\pi\int_{-1}^{4} (16 + 24x + x^2 - 6x^3 + x^4)dx$$

$$\rightarrow \quad V_x = 4\pi\left[16x + 12x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{4}$$

$$= 4\pi\left[81 + \frac{65}{3} + \frac{3}{2}\right] = \frac{1250}{3}\pi$$

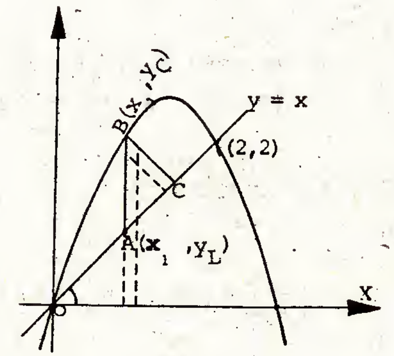
$$\rightarrow \quad V_x = \frac{1250}{3}\pi$$

25. $y = x$; $y = 3x - x^2$

Solución :

Las coordenadas de pto.

$$\left.\begin{array}{l} B(x,y_C) = B(x,3x - x^2) \\ X(x,V_L) = B(x,x) \end{array}\right\} (1)$$



Además calculemos la semivalencia entre las rectas:

BC , AC

$$\rightarrow \quad \frac{BC}{BA} = \text{sen } 45° =$$

$$\rightarrow \quad BC = BA \text{ sen } 45°$$

y $BC = y_C - y_L = (3x - x^2 - x)\ \} \ldots (2)$

de (1) en (2) se tiene:

$$BC = (2x - x^2)\text{sen}45° = \frac{2x - x^2}{\sqrt{2}}$$

En nuestro ejercicio nos piden el giro de la superficie alrededor de $y = x$, esto significa que el radio de giro será:

$$r = BC = \frac{2x - x^2}{\sqrt{2}}$$

Además se tiene que:

$$\sec 45° = \frac{dh}{dx} \quad \rightarrow \quad dh = \sqrt{2}\ dx$$

Aplicando la fórmula para el volumen se tiene que:

$$d(V) = \pi r^2h$$

$$\rightarrow V_x = \pi\int_0^2 \left(\frac{2x - x^2}{\sqrt{2}}\right)^2\sqrt{2}\,dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}\int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4)dx$$

$$V_x = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}\left[\frac{4}{3}x^3 - x^4 + \frac{1}{5}x^5\right]_0^2 = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}\left[\frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5}\right]$$

$$\rightarrow V_x = \frac{8}{15}\pi\sqrt{2}$$

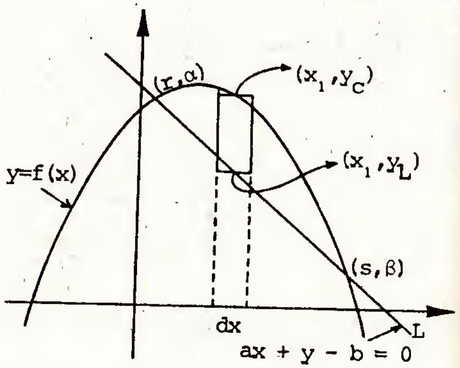
NOTA:

El volumen generado por la rotación de la superficie A(ver fig.) alrededor de la recta L, seda por la siguiente fórmula:

$$\rightarrow V = 2\pi\left(\frac{a\bar{x} + \bar{y} - b}{\sqrt{a^2 + 1}}\right).A$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{a^2+1}}(aM_y + M_x - bA)$$

$$\rightarrow V = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 + 1}}\int_r^s (y_C - y_L)^2 dx$$



26. $x + y = 1;\quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

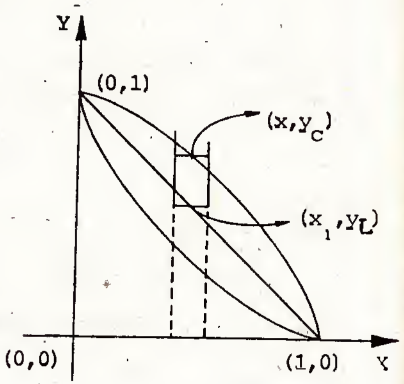
Solución.

$$\rightarrow V_x = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_0^1 (y_C - y_L)^2 dx$$

$$V_x = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_0^1 (1 - 2\sqrt{x} + x - 1 + x)^2 dx$$

$$V_x = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_0^1 (2x - 2\sqrt{x})^2 dx$$

$$V_x = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_0^1 (4x^2 - 8x^{3/2} + 4x)dx$$



$$V_x = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{16}{5}x^{5/2} + 2x^2\right]_0^1 = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}\left[\frac{4}{3} - \frac{16}{5} + 2\right]$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{2}\times\frac{2}{15}$$

$$\rightarrow V_x = \frac{1}{15}\pi\sqrt{2}$$

27. Hallar el volumen del sólido que se engendra haciendo girar la catenaria $y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$ alrededor del eje x; desde x = 0, hasta x = b.

Solución.

El volumen buscado será:

$$\rightarrow V_x = \pi\int_0^b y^2 dx$$

$$V_x = \pi\int_0^b \frac{a^2}{4}(e^{x/a} + e^{-x/a})^2 dx$$

$$V_x = \frac{a^2}{4}\pi\int_0^b (e^{2x/a} + 2e^{x/a}.e^{-x/a} + e^{-2x/a})dx$$

$$V_x = \frac{a^2}{4}\pi\int_0^b (e^{2x/a} + e^{-2x/a} + 2)dx$$

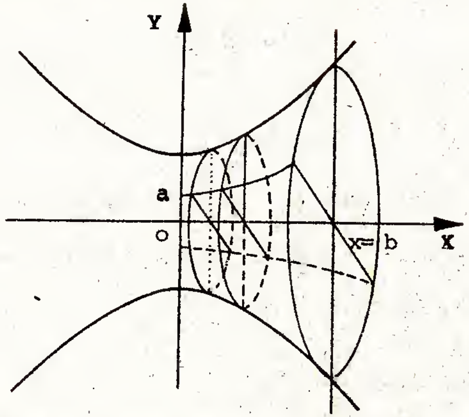
$$V_x = \frac{a^2}{4}\pi\left\{\frac{a}{2}\int_0^b e^{2x/a}d(2x/a) - \frac{a}{2}\int_0^b e^{-2x/a}d\left(\frac{-2x}{a}\right) + 2\int_0^b dx\right\}$$

$$V_x = \frac{a^3}{8}\pi\left\{\int_0^b e^{2x/a}d(2x/a) - \int_0^b e^{-2x/a}d(-2x/a)\right\} + \frac{a^2}{2}\pi\int_0^b dx$$

$$V_x = \frac{a^3}{8}\pi\left[e^{2x/a} - e^{-2x/a}\right]_0^b + \left[\frac{a^2\pi}{2}x\right]_0^b$$

$$= \frac{a^3}{8}\pi(e^{2b/a} - e^{-2b/a}) + \frac{\pi a^2 b}{2}$$

$$\rightarrow V_x = \frac{a^3}{8}\pi\left(e^{2b/a} - e^{-2b/a}\right) + \frac{\pi a^2 b}{2}$$



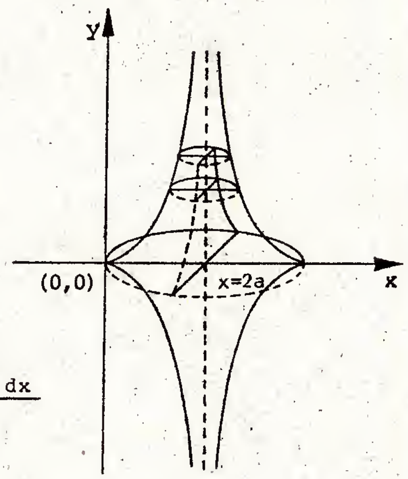
28. Hallar el volumen del sólido engendrado haciendo girar la cisoide $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ alrededor de su asíntota $x = 2a$

Solución.

$\rightarrow dV_x = \pi r^2 dy$

donde:

$r = 2a - x$; $h = dy$



$$\rightarrow y = \sqrt{\frac{x^3}{2a - x}}$$

$$\rightarrow dy = \frac{x^{1/2}(3a-x)dx}{(2a-x)^{3/2}}$$

$$\rightarrow V_x = 4\pi\int_0^{2a}(2a-x)^2\,\frac{x^{1/2}(3a-x)dx}{(2a-x)^{3/2}}$$

$$V_x = 4\pi\int_0^{2a}(2ax - x^2)^{1/2}(3a - x)dx$$

$$\rightarrow V_x = 4\pi\{2a\int_0^{2a}\sqrt{2ax - x^2}\,dx + \int_0^{2a}\sqrt{2ax - x^2}(a - x)dx$$

$$V_x = 4\pi\{2a\int_0^{2a}\sqrt{a^2 - (x - a)^2}dx - \int_0^{2a}(x-a)\sqrt{a^2-(x-a)^2}\,dx\}$$

$$V_x = 4\pi\left[2a\,\frac{1}{2}\,(x-a)\sqrt{2ax - x^2} + a^3\text{arcsen}\,\frac{(x-a)}{a} - \frac{(2ax-x^2)^{3/2}}{3}\right]_0^{2a}$$

$$V_x = 4\pi a^3\text{arcsen}(1) = 2\pi^2 a^3$$

29. Empleando las ecuaciones paramétricas de la hipocicloide

$$x = a\cos^3\theta$$
$$y = a\,\text{sen}^3\theta$$

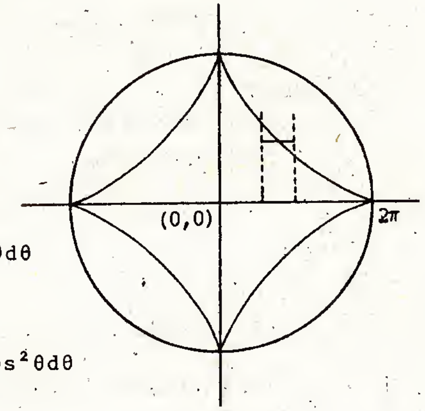
Hallar el volumen del sólido que se engendra haciendolo girar alrededor de OX.

Solución.

El volumen pedido será:

$$dv = \pi y^2 dx$$

donde:



$y^2 = a^2\text{sen}^6\theta$;

$dx = -\,3a\cos^2\theta\,\text{sen}\theta\,d\theta$

$$V_x = \pi\int_{\pi/2}^{2\pi} -\,3a^3\text{sen}^6\theta.\text{sen}\theta.\cos^2\theta d\theta$$

$$V_x = -2x3x\pi xa^3\int_{\pi/2}^{2\pi}\text{sen}^6\theta.\text{sen}\theta.\cos^2\theta d\theta$$

$$= -\,6\pi a^3\int_{\pi/2}^{2\pi}(1 - \cos^2\theta)^3\text{sen}\,.\cos^2\theta d\theta = -$$

$$-\,6\pi a^3\int_{\pi/2}^{2\pi}(1-3\cos^2\theta+3\cos^4\theta - \cos^6\theta)\text{sen}\theta\cos^2\theta d\theta$$

$$= -\,6\pi a^3\int_{\pi/2}^{2\pi}(\text{sen}\theta.\cos^2\theta - 3\cos^4\text{sen}\theta + 3\cos^6\theta -$$
$$-\,\cos^8\theta\,\text{sen}\theta)d\theta$$

$$= 6\pi a^3\left[\frac{1}{3}\cos^3\theta - \frac{3}{5}\cos^3\theta + \frac{3}{7}\cos^7\theta - \frac{1}{9}\cos^9\theta\right]_{\pi/2}^{2\pi}$$

$$\rightarrow V_x = 6\pi a^3\left(\frac{105 - 189 + 135 - 35}{315}\right) = \frac{32\pi a^3}{105}$$

$$\rightarrow V_x = \frac{32\pi a^3}{105}$$

30. Hallar el volumen del sólido engendrado haciendo girar una arcada de la cicloide.

$$x = a(\theta - \text{sen}\,\theta)$$

$$y = a(1 - \cos\theta)$$

alrededor de su base OX.

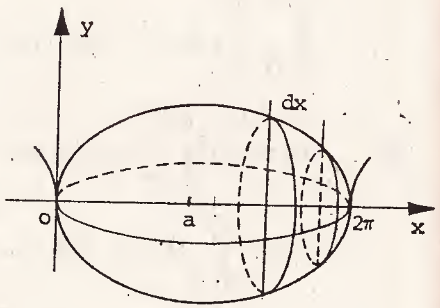
Demostrar que si la arcada gira alrededor de OY, el volumen que se engendra es: $6\pi^3 a^3$

Solución.

El volumen del sólido engendrado haciendo girar una arcada de la cicloide será:

$$dV = \pi y^2 dx$$

donde:



$$y^2 = a^2(1 - \cos\theta)^2$$

$$dx = a(1 - \cos\theta)d\theta$$

$$\rightarrow V_x = \pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2(1-\cos\theta)d\theta$$

$$\rightarrow V_x = \pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^3 d\theta =$$

$$= \pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos\theta+3\cos^2\theta-\cos^3\theta)d\theta$$

$$V_x = \pi a^3\{\int_0^{2\pi}d\theta - 3\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta + \frac{3}{2}\int_0^{2\pi}d\theta + \frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2\theta d\theta -$$

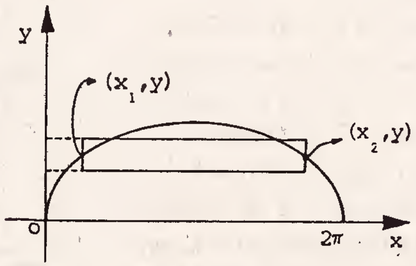
$$- \int_0^{2\pi}\cos d\theta + \int_0^{2\pi}\text{sen}^2\theta\cos\theta d\theta\}$$

$$V_x = \pi a^3\left[\theta - 3\,\text{sen}\,\theta + \frac{3}{2}\theta + \frac{3}{4}\text{sen}\,2\theta - \text{sen}\,\theta + \frac{1}{3}\text{sen}^3\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$V_x = 5\pi^2 a^3$$

Cuando la cicloide gira alrededor de OY; su volumen será:

$$\frac{V_x}{2} = \pi xy dx$$



$$\rightarrow V_x = 2\pi xy dx$$

donde:

$$xy = a^2(\theta-\text{sen}\,\theta)(1-\cos\theta)$$

$$dx = a(1 - \cos\theta)d\theta$$

$$\rightarrow V_x = 2\pi\int_0^{2\pi}a^3(a-\text{sen}\,\theta)(1-\cos\theta)^2 d\theta$$

$$\rightarrow V_x = 2\pi a^3\int_0^{2\pi}(\theta-2\theta\cos\theta+\theta\cos^2\theta-\text{sen}\,\theta+2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta-\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta)d\theta$$

$$\rightarrow V_x = 2\pi a^3\left[\frac{3}{4}\theta^2 - 2\theta\,\text{sen}\,\theta - 2\cos\theta + \frac{1}{4}\theta\,\text{sen}\,2\theta + \frac{1}{4}\cos 2\theta + \right.$$

$$\left. + \cos\theta + \text{sen}^2\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$\rightarrow V_x = 2\pi a^3\left[3\pi^2 - 2 + \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{3} + 2 - \frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{3}\right]$$

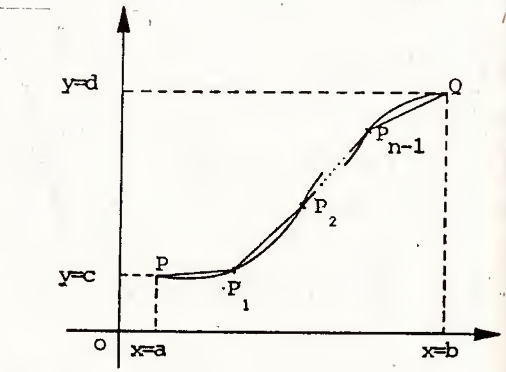
$$\rightarrow V_x = 6\pi^3 a^3$$

LONGITUD DE UN ARCO DE CURVA

DEFINICION: La longitud de arco de una curva se define como el límite de la suma de los lados de la poligonal cuando el número de los puntos de división tiende al infinito, al mismo tiempo que c/u de los lados tienden a cero.

1.- LONGITUD DE ARCOS DE CURVAS PLANAS COORDENADAS RECTANGULARES.

Sea $P(a,c)$, $Q(b,d)$ dos puntos de la curva $y = f(x)$ donde: $f(x)$; $f'(x)$ continuas en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$; en estas condiciones, la longitud de arco AB se da por:



$$S = \int_{AB} ds = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \quad \ldots (I)$$

De la misma manera: Si $P(a,c)$; $Q(b,d)$ son dos puntos de la curva $x = g(y)$, siendo $g(y)$; $g'(y)$ continuas en el intervalo $c \leqslant y \leqslant d$, la longitud del arco AB viene dado por:

$$S = \int_{AB} ds = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy \quad \ldots (II)$$

2.- LONGITUD DEL ARCO DE UNA CURVA DADA EN FORMA PARAMETRICA.

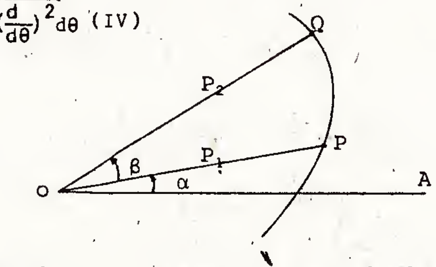
si $P(t = t_1)$; $Q(t = t_2)$ son dos puntos de una curva definida por la ecuaciones paramétricas $x = f(t)$; $y = y(t)$ que cumplen las condiciones de continuidad, la longitud del arco AB viene dado por:

$$S = \int_{AB} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \quad \ldots\ldots (III)$$

3.- LONGITUD DE ARCOS DE CURVAS PLANAS COORDENADAS POLARES:

Si una curva viene dada por una eucación $\rho = f(\theta)$ en coordenadas polares ρ, θ, la longitud S del arco será:

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \quad (IV)$$



PROBLEMAS:

1.- Hallar la longitud del arco de la curva cuya ecuación es $y^3 = x^2$, comprendido entre los puntos $(0,0)$; $(8,4)$.

Solución.

Derivando: $3y^2 \frac{dy}{dx} = 2x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2}$; ..... (1)

Sustituyendo $y^2 = x^{4/3}$ en (1) a fin de tener todo en términos de x.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} x^{-1/3} \quad \ldots$$

$$\rightarrow S = \int_0^8 \sqrt{1 + \frac{4}{9} x^{-2/3}}\, dx = \int_0^8 \left(x^{2/3} + \frac{4}{9}\right)^{1/2} x^{-1/3}\, dx$$

Haciendo $u = x^{2/3} + \frac{4}{9} \rightarrow du = \frac{2}{3} x^{-1/3} dx \rightarrow \frac{3}{2} du = x^{-1/3} dx$

en la integral se tiene:

$$S = \frac{3}{2} \int_0^8 u^{1/2} du = \left[u^{3/2}\right]_0^8 =$$

$$\rightarrow S = \left[\left(x^{2/3} + \frac{4}{9}\right)^{3/2}\right]_0^8 = 9.07$$

$$\rightarrow S = 9.07$$

2.- Hallar la longitud del arco de la parábola semicúbica $ay^2 = x^3$ desde el origen $(x = 0)$; hasta la ordenada $x = 5a$

Solución.

derivando: $2ay\frac{dy}{dx} = 3x^2 \to \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2ay}$ .... (1)

Sustituyendo $y = (\frac{x^3}{a})^{1/2}$ en (1) a fin de tener todo en términos de x:

$$\to \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}(\frac{x}{a})^{1/2}$$

$$\to S = \int_0^{5a}\sqrt{1 + \frac{9}{4}\frac{x}{a}}\,dx =$$

Haciendo $u = 1 + \frac{9x}{4a} \to \frac{4a}{9}du = dx$

$$\to S = \frac{4a}{9}\int_0^{5a} u^{1/2}du = [\frac{8a}{27}u^{3/2}]_0^{5a} = [\frac{8a}{27}(1 + \frac{9x}{4a})^{3/2}]_0^{5a}$$

$$\to S = \frac{335a}{27}$$

3.- Hallar la longitud del arco de la curva cuya ecuación es: $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$ desde el punto de abscisa $x = 1$, al punto a abscisa $x = 3$.

Solución.

derivando: $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}(\frac{x^4 - 1}{x^2})$

$$\to S = \int_1^3\sqrt{1 + \frac{1}{4}(\frac{x^4 - 1}{x^2})^2}\,dx = \int_1^3\sqrt{\frac{x^8 + 2x^4 + 1}{4x^4}}\,dx$$

$$S = \int_1^3\frac{x^4 + 1}{2x^2}\,dx = \int_1^3(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2x^2})dx$$

$$S = \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x\right]_1^3 = \frac{14}{3} \quad \to \quad S = \frac{14}{3}$$

4.- Hallar la longitud del arco de la parábola $y^2 = 2px$ desde el vértice a un extremo del lado recto.

Solución.

derivando: $2y\frac{dy}{dx} = 2p \to \frac{dy}{dx} = \frac{2p}{2y} = \ldots.$ (1)

Sustituyendo $y = (2px)^{1/2}$ en (1) se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = (\frac{p}{2x})^{1/2}$$

$$\to S = \int_0^p\sqrt{1 + \frac{p}{2x}}\,dx = \int_0^p\sqrt{\frac{2x + p}{2x}}\,dx = \int_0^p\frac{\sqrt{2x + p}}{\sqrt{2x}}\,dx$$

Haciendo $u^2 = 2x + p \to x = \frac{1}{2}(u^2 - p)$; $dx = udu$;

$\sqrt{2x} = \sqrt{u^2 - p}$; para $\begin{cases} x = 0 \ ; \ u = \pm\sqrt{p} \\ x = p \ ; \ u = \pm\sqrt{2p} \end{cases}$

En la integral se tiene:

$$S = \int_{\sqrt{p}}^{\sqrt{2p}}\frac{u^2du}{\sqrt{u^2 - p}} = \left[\frac{u}{2}\sqrt{u^2 - p} + \frac{p}{2}\ln(u + \sqrt{u^2 - p})\right]_{\sqrt{p}}^{\sqrt{2p}}$$

$$\to S = \frac{p\sqrt{2}}{2} + \frac{p}{2}\ln(\sqrt{2p} + \sqrt{p}) - \frac{p}{2}\ln\sqrt{p}$$

$$S' = \frac{p\sqrt{2}}{2} + \frac{p}{2}\ln(\sqrt{2} + 1) + \frac{p}{2}\ln\sqrt{p} - \frac{p}{2}\ln\sqrt{p}$$

$$\to S = \frac{p\sqrt{2}}{2} + \frac{p}{2}\ln(1 + \sqrt{2})$$

5.- Hallar la longitud del arco de la parábola $6y = x^2$ desde el origen al punto $(4, 8/3)$

Solución.

derivando $\frac{dv}{dx} = \frac{x}{3}$

$$\to S = \int_0^4\sqrt{1 + \frac{x^2}{9}}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^4\sqrt{9 + x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2 + 9} + \frac{9}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 + 9})\right]_0^4 \quad \to \quad S = 4.98$$

6.- Hallar la longitud del arco de la curva $y = \ln\sec x$ desde el origen al punto $(\pi/3, \ln 2)$.

Solución.

derivando $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tag} x$

$$\rightarrow S = \int_0^{\pi/3} \sqrt{1 + tg^2 x}\,dx = \int_0^{\pi/3} \sec x\,dx = \Big[\ln(\sec x + tg x)\Big]_0^{\pi/3}$$

$$= \ln(2 + \sqrt{3})$$

$$\rightarrow S = \ln(2 + \sqrt{3})$$

7.- Hallar la longitud del arco de la hiperbola $x^2 - y^2 = 9$ comprendido entre los puntos $(3,0)$; $(5,4)$ (empleese la regla de Simpson).

Solución.

derivando $\frac{2x\,dx}{dy} - 2y = 0 \rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{y}{x}$

$$\rightarrow S = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}\,dy = \int_0^4 \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2}}\,dy$$

Sustituyendo $x^2 = 9 - y^2$, a fin de tener todo en término de y.

$$S = \int_0^4 \sqrt{\frac{2y^2 + 9}{y^2 + 9}}\,dy$$

aplicando la fórmula de Simpson para $n = 4$

$$\Delta_y = \frac{b - a}{n} = \frac{4 - 0}{4} = 1 \quad ; \quad x = \sqrt{\frac{2y^2 + 9}{y^2 + 9}}$$

Haciendo una tabla de valores para x, y:

y	x
0	1
1	1.048
2	1.443
3	1.224
4	1.281

$$\text{Area} = (\tfrac{1}{2} x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + \tfrac{1}{2} x_4)\Delta_y$$

$$\text{Area} = (0.5 + 1.048 + 1.143 + 1.224 + 0.64$$

$$\text{Area} = 4.555 \doteq 4.56$$

8. Hallar la longitud total de la hipocicloide

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

Solución.

derivando: $\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3}\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -(\frac{y}{x})^{1/3}$

$$\rightarrow \frac{S}{4} = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}}\,dx = 4\int_0^a \sqrt{\frac{x^{2/3} + y^{2/3}}{x^{2/3}}}\,dx \quad \ldots\ (1)$$

Sustituyendo $y^{2/3} = a^{2/3} - x^{2/3}$ en (1), a fin de tener todo en término de x:

$$S = 4\int_0^a \sqrt{\frac{a^{2/3}}{x^{2/3}}}\,dx = 4a^{1/3}\int_0^a x^{-1/3}\,dx = \Big[6a^{1/3}x^{2/3}\Big]_0^a = 6a$$

$$\rightarrow S = 6a$$

9.- Rectificar el arco de la catenaria $y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$ desde $x = 0$; al punto (x,y).

Solución.

Derivando $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^{x/a} - e^{-x/a})$

$$\rightarrow S = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{1}{4}(e^{2x/a} - 2 + e^{-2x/a})}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^x \sqrt{e^{2x/a} + 2 + e^{-2x/a}}\,dx$$

$$S = \frac{1}{2}\int (e^{x/a} + e^{-x/a})dx = \frac{a}{2}\int_0^x e^{x/a}d(\tfrac{x}{a}) - \frac{a}{2}\int_0^x e^{-x/a}d(x/a) =$$

$$S = \Big[\frac{a}{2}(e^{x/a} - e^{-x/a})\Big]_0^x = \frac{a}{2}(e^{x/a} - e^{-x/a})$$

10. Hallar la longitud de una arcada completa de la cicloide.

$x = r \text{ arc vers } \frac{y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}$

Solución.

derivando $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{2ry - y^2}}$;

$$\to \frac{S}{2} = \int_0^{2r} \sqrt{1 + \frac{y^2}{2ry - y^2}}\, dy = \int_0^{2r} \sqrt{\frac{2ry}{2ry - y^2}}\, dy$$

$$S = 2\int_0^{2r} \frac{\sqrt{2r}}{\sqrt{2r - y}}\, dy = 2\sqrt{2r}\int_0^{2r} (2r - y)^{-1/2} dy =$$

$u = 2r - y \to - du = dy$

$$\to -2\sqrt{2r}\int_0^{2r} u^{-1/2} du = \left[-4\sqrt{2r}\, u^{1/2}\right]_0^{2r} = \left[-4\sqrt{2r}(2r-y)^{1/2}\right]_0^{2r} = 8r$$

$\to S = 8r$

11. Hallar la longitud en un cuadrante de la curva:

$$(\frac{x}{a})^{2/3} + (\frac{y}{b})^{2/3} = 1$$

Solución.

$$\frac{2}{3a^{2/3}} x^{-1/3} + \frac{2}{3b^{2/3}} y^{-1/3} \frac{dy}{dx} = 0 \to \frac{dy}{dx} = -(\frac{b^2 y}{a^2 x})^{1/3}$$

$$\to S = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{(b^2y)^{2/3}}{(a^2x)^{2/3}}}\, dx = \left[\frac{(a^2x)^{2/3} + (b^2y)^{2/3}}{(a^2x)^{2/3}}\right]^{1/2} dx \ \ldots (1)$$

Sustituyendo $y^{2/3} = b^{2/3}(1 - (\frac{x}{a})^{2/3})$ en (1) a fin de tener todo en término de x.

$$S = \int_0^a \left[\frac{(a^2x)^{2/3} + b^2(1-(x/a))^{2/3})}{(a^2x)^{2/3}}\right]^{1/2} dx =$$

$$= \int_0^a \left[\frac{a^2x^{2/3} + b^2a^{2/3} - b^2x^{2/3}}{a^2x^{2/3}}\right]^{1/2} dx$$

$$S = \frac{1}{a}\int_0^a (b^2a^{2/3} + (a^2 - b^2)x^{2/3})^{1/2} x^{-1/3} dx$$

Haciendo $u = b^2a^{2/3} + (a^2 - b^2)x^{2/3} \to \frac{3}{2}(\frac{du}{a^2 - b^2}) = x^{-1/3}dx$

en la integral se tiene:

$$S = \frac{3}{2a(a^2 - b^2)}\int_0^a u^{1/2} du = \left[\frac{u^{3/2}}{a(a^2 - b^2)}\right]_0^a$$

$$= \left[\frac{(b^2a^{2/3} + (a^2 - b^2)x^{2/3})^{3/2}}{a(a^2 - b^2)}\right]_0^a$$

$$S = \frac{a^4}{a(a^2 - b^2)} - \frac{b^3 a}{a(a^2 - b^2)} = \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2} = \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$$

12. Hallar la longitud entre $x = a$; $x = b$ de la curva:

$$e^y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

Solución.

derivando:

$$\ln e^y = \ln(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}) \to \frac{dy}{dx} = \frac{-2e^x}{e^{2x} - 1}$$

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + \frac{4e^{2x}}{e^{4x} - 2e^{2x} + 1}}\, dx = \int_a^b \left[(\frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1})^2\right]^{1/2} dx$$

$$S = \int_a^b (1 + \frac{2}{e^{2x} - 1}) dx = \int_a^b dx + 2\int_a^b \frac{dx}{e^{2x} - 1} =$$

$$= \left[x + \ln(\frac{e^x - 1}{e^x + 1})\right]_a^b$$

$$S = b + \ln(\frac{e^b - 1}{e^b + 1}) - a - \ln(\frac{e^a - 1}{e^a + 1})$$

$$S = \ln\left(\frac{(e^b - 1)(e^a + 1)}{(e^b + 1)(e^a - 1)}\right) + b - a$$

13. Hallar la longitud del arco de la curva.

$$\left.\begin{array}{l} x = e^{\theta}\operatorname{sen}\theta \\ y = e^{\theta}\cos\theta \end{array}\right\} \text{desde : } \theta = 0;\quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

Solución.

derivando: $\frac{dx}{d\theta} = e^{\theta}\cos\theta + e^{\theta}\operatorname{sen}\theta$

$$\frac{dy}{d\theta} = -e^{\theta}\operatorname{sen}\theta + e^{\theta}\cos\theta$$

$$\to S = \int_0^{\pi/2}\left[(e^{\theta}\cos\theta + e^{\theta}\operatorname{sen}\theta)^2 + (-e^{\theta}\operatorname{sen}\theta + e^{\theta}\cos\theta)^2\right]^{1/2} d\theta$$

$$\to S = \int_0^{\pi/2}\left[e^{2\theta}\cos^2\theta + 2e^{2\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + e^{2\theta}\operatorname{sen}^2\theta + e^{2\theta}\operatorname{sen}^2\theta - 2e^{2\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + e^{2\theta}\cos^2\theta\right]^{1/2} \cdot d\theta$$

$$S = \int_0^{\pi/2}(2e^{2\theta})^{1/2} d\theta = \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} e^{\theta} d\theta = \sqrt{2}\, e^{\theta}\Big]_0^{\pi/2}$$

$$S = \sqrt{2}\, e^{\pi/2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}(e^{\pi/2} - 1)$$

Hallar la longitud del arco de c/u de las siguientes curvas, comprendido entre los puntos cuyas abscisas se indican.

14. $y = \ln(1 - x^2)$; desde $x = 0$; $x = \frac{1}{2}$

Solución.

derivando: $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{1 - x^2}$

$$\to S = \int_0^{1/2}\left(1 + \frac{4x^2}{(1 - x^2)^2}\right)^{1/2} dx = \int_0^{1/2}\left[\left(\frac{1 + x^2}{1 - x^2}\right)^2\right]^{1/2} dx = -\int_{1/2}^{0}\frac{1 + x^2}{1 - x^2}\, dx$$

$$S = -\int_{1/2}^{0}\left(-1 + \frac{2}{1 - x^2}\right)dx = -\left\{\int_0^{1/2} dx + 2\int_0^{1/2}\frac{dx}{x^2 - 1}\right\} = -$$

$$= -\left[x + \ln\left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)\right]_{1/2}^{0}$$

$$S = \frac{1}{2} + \ln\frac{1}{3}.$$

15. $y = \ln\csc x$ desde: $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$

Solución. Derivando:

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg}x;$$

$$\to S = \int_{\pi/6}^{\pi/2}(1 + \operatorname{ctg}^2 x)^{1/2} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2}\csc x\, dx = \ln(\csc x - \operatorname{ctg}x)\Big]_{\pi/6}^{\pi/2}$$

$$S = -\ln(2 = \sqrt{3}) = \ln\left(\frac{1}{2 - \sqrt{3}}\right)$$

16. Hallar la longitud del arco de la espiral de arquimedes, $\rho = a\theta$, desde el origen al extremo de la primera vuelta:

Solución.

derivando y aplicando la fórmula (IV) se tiene :

$$\frac{d\rho}{d\theta} = a;$$

$$\to S = \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\theta^2 + a^2}\, d\theta = a\int_0^{2\pi}\sqrt{\theta^2 + 1}\, d\theta =$$

$$= a\left[\frac{\theta}{2}\sqrt{\theta^2 + 1} + \frac{1}{2}\ln(\theta + \sqrt{\theta^2 + 1})\right]_0^{2\pi}$$

$$S = \pi a\sqrt{4\pi^2 + 1} + \frac{a}{2}\ln(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1})$$

17. Hallar la longitud de la curva:

$$\rho = a\sec^2\frac{\theta}{2}\ , \text{ desde } \theta = 0\ ;\ \theta = \frac{\pi}{2}$$

Solución. derivando:

$$\frac{d\rho}{d\theta} = a\sec\frac{\theta}{2}\sec\frac{\theta}{2}\,tg\frac{\theta}{2} = a\sec^2\frac{\theta}{2}\,,\ tg\frac{\theta}{2}$$

$$S = \int_0^{\pi/2} a(\sec^4\frac{\theta}{2} + \sec^4\frac{\theta}{2}\,tg^2\frac{\theta}{2})^{1/2}d\theta = \int_0^{\pi/2} a\sec^3\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

Haciendo $u = \frac{\theta}{2} \rightarrow 2du = d\theta$

en la integral se tiene:

$$S = 2\int_0^{\pi/2} a\sec^3 u\,du = a\left[\sec u\,tgu + \ln(\sec u + tgu)\right]_0^{\pi/2}$$

$$\rightarrow S = a[\sec\frac{\theta}{2}\,tg\frac{\theta}{2} + \ln(\sec\frac{\theta}{2} + tg\frac{\theta}{2}]_0^{\pi/2}$$

$$S = [\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)]a$$

18. Hallar la longitud del arco de la espiral hiperbólica $\rho\theta = a$ limitado por los puntos: (ρ_1, θ_1) ; (ρ_2, θ_2)

Solución.

derivando $\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{a}{\theta^2}$

$$\rightarrow S = \int_{\rho_1}^{\rho_2} (\rho^2(\frac{d\theta}{d\rho})^2 + 1)^{1/2}d\rho = \int_{\rho_1}^{\rho_2} (\rho^2 . \frac{a^2}{\rho^4} + 1)^{1/2}d\rho$$

$$= \int_{\rho_1}^{\rho_2} (\frac{a^2 + \rho^2}{\rho^2})^{1/2}d\rho$$

$$S = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{(a^2 + \rho^2)^{1/2}}{\rho}\,d\rho$$

Haciendo la sustitución.

$$u^2 = a^2 + \rho^2 \rightarrow \rho = \sqrt{u^2 - a^2} \rightarrow d\rho = \frac{udu}{\sqrt{u^2 - a^2}}$$

en la integral se tiene:

$$S = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{u^2du}{u^2 - a^2} = \int_{\rho_1}^{\rho_2} (1 + \frac{a^2}{u^2 - a^2})du = \int_{\rho_1}^{\rho_2} du + a^2\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{du}{u^2 - a^2}$$

$$= \left[u + \frac{1}{2}a\ln(\frac{u-a}{u+a})\right]_{\rho_1}^{\rho_2}$$

Pero: $u^2 = a^2 + \rho^2 \rightarrow u = \sqrt{a^2 + \rho^2}$

$$\therefore S = \left[\sqrt{a^2 + \rho^2} + \frac{a}{2}\ln(\frac{\sqrt{a^2 + \rho_2^2} - a}{\sqrt{a^2 + \rho_2^2} + a})\right]_{\rho_1}^{\rho_2}$$

$$S = \sqrt{a^2 + \rho_2^2} - \sqrt{a^2 + \rho_1^2} + \frac{a}{2}\ln(\frac{\sqrt{a^2 + \rho_2^2} - a}{\sqrt{a^2 + \rho_2^2} + a}) - \frac{a}{2}\ln(\frac{\sqrt{a^2 + \rho_1^2} - a}{\sqrt{a^2 + \rho_2^2} + a})$$

$$S = \sqrt{a^2 + \rho_2^2} - \sqrt{a^2 + \rho_1^2} + \frac{a}{2}\ln\frac{(\sqrt{a + \rho_2^2} - a)(\sqrt{a^2 + \rho_2^2} + a)}{(\sqrt{a + \rho_2^2} + a)(\sqrt{a^2 + \rho_2^2} + a)} -$$

$$-\frac{a}{2}\ln\frac{(\sqrt{a^2+\rho_1^2}-a)(\sqrt{a^2+\rho_1^2} + 1)}{(\sqrt{a_1^2+\rho_1^2}+a)(\sqrt{a^2+\rho_1^2} + 1)}$$

$$\rightarrow S = \sqrt{a^2 + \rho_2^2} - \sqrt{a^2 + \rho_1^2} + a\ln\frac{\rho_1(a + \sqrt{a^2 + \rho_2^2})}{\rho_2(a + \sqrt{a^2 + \rho_2^2})})$$

19. Demostrar que la longitud total de la curva

$$\rho = a\,\text{sen}^3\frac{\theta}{3}\ \text{es}:\ \frac{3\pi a}{2}$$

Solución.

Derivando $\frac{d\rho}{d\theta} = a\,\text{sen}^2\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}$; $\theta = 0$; hasta $\theta = 3\pi$

$$\rightarrow S = \int_0^{3\pi} \sqrt{a^2\text{sen}^6\frac{\theta}{3} + a^2\text{sen}^4\frac{\theta}{3}\cos^2\frac{\theta}{3}}\,d\theta = \int_0^{3\pi} a\,\text{sen}^2\frac{\theta}{3}\,d\theta$$

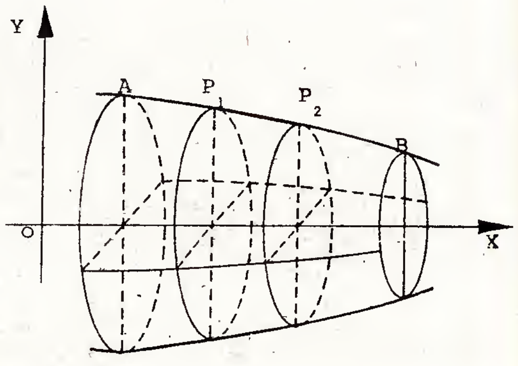
$$\rightarrow S = \frac{1}{2}\int_0^{3\pi} a\,d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{3\pi} a\cos\frac{2\theta}{3}\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{3\pi} a\,d\theta - \frac{3}{4}\int_0^{3\pi} a\cos\frac{2\theta}{3}\,d(\frac{2\theta}{3})$$

$$S = a[\frac{1}{2}\theta - \frac{3}{4}\,\text{sen}\frac{2\theta}{3}]_0^{3\pi} = \frac{3\pi}{2}a$$

→ La longitud total es $S = \frac{3\pi}{2}a$

AREAS DE SUPERFICIES DE REVOLUCION

El área de la superficie generada por la rotación del arco AB de una curva continua alrededor de una recta situada en su plano A por definición el límite de la suma de las áreas generadas por las n cuerdas $AP_1; P_1P_2 \ldots P_{n-1}B$ en la rotación en torno a dicha recta cuando el número de cuerdas crece indefinidamente de manera que la longitud de cada una de las cuerdas tiende a cero



Si $A(a,c)$, $B(b,d)$ son dos puntos de la curva $y = f(x)$, siendo $f(x)$; $f'(x)$ continuas y además $f(x)$ no cambia de signo en el intervalo $a \leq x \leq b$, el área de la superficie generada en la rotación del arco AB alrededor del eje x viene dada por:

$$S_x = 2\pi\int_{AB} y\,ds = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \quad \ldots \text{(I)}$$

Asimismo si $f'(x) \neq 0$ en el intervalo $a \leq x \leq b$ se tiene:

$$S_y = 2\pi\int_{AB} y\,ds = 2\pi\int_c^d y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy \quad \ldots \text{(II)}$$

Si $A(a,c)$, $B(b,d)$ son dos puntos de la curva $x = g(y)$, donde $g(x)$, $g'(y)$ satisfacen las condiciones de continuidad, el área de la superficie generada en la rotación del arco AB con respecto al eje x viene dado por:

$$S_y = 2\pi\int_{AB} x\,ds = 2\pi\int_a^b \underbrace{x\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx}_{ds}$$

$$= 2\pi\int_c^d \underbrace{x\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy}_{ds} \quad \ldots\ldots \text{(III)}$$

Si $A(t = t_1)$, $B(t = t_2)$ son dos puntos de la curva definidas por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, funciones que satisfacen las condiciones de continuidad, el área de la superficie generada en la rotación del arco AB alrededor del eje x viene dada por:

$$S_x = 2\pi\int_{AB} y\,ds = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y\underbrace{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt}_{ds} \quad \ldots\ldots \text{(IV)}$$

El área generada en la rotación del arco AB alrededor del eje Y viene dada por:

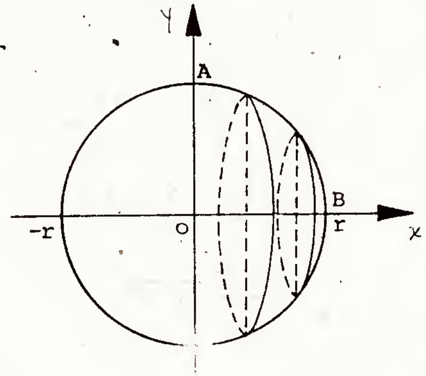
$$S_y = 2\pi\int_{AB} x\,d = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} x\underbrace{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt}_{ds} \quad \ldots\ldots \text{(V)}$$

PROBLEMAS

1.- Hallar por integración, el área de la superficie esférica engendrada haciendo girar el círculo $x^2 + y^2 = r^2$ alrededor de un diámetro.

Solución.

aquí $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$; $y = \sqrt{r^2 - x^2}$



$$\rightarrow ds = \left(1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}\right)^{1/2} dx$$

$$= \left(\frac{r^2}{r^2 - x^2}\right)^{1/2} dx$$

Aplicando (I) se tiene que:

$$S_x = 2\pi\int_0^r y\,ds = 2\pi\int_0^r (r^2-x^2)^{1/2}\left(\frac{r^2}{r^2-x^2}\right)^{1/2}dx$$

$$\to S_x = 2\pi\int_0^r r\,dx = \Big[2\pi r x\Big]_0^r = 2\pi r^2$$

de la fig. se observa que el arco BA engendra solo una mitad de la superficie.

$$\therefore \quad S_x = 4\pi r^2$$

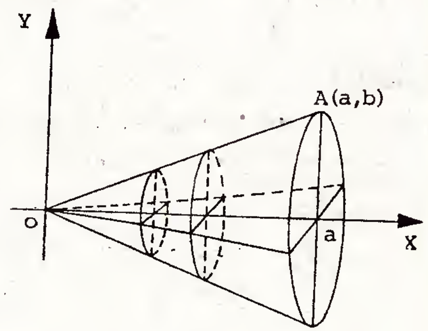
2.- Hallar por integración, el área lateral del cono engendrado al hacer girar el segmento q' une el origen con el punto (a,b) alrededor de OX.

Solución.

Sea $y = \frac{b}{a}x$ la ecuación de la recta.

aquí $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$, $y = \frac{b}{a}x$

$$\to dS = \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)^{1/2}dx = \left(\frac{a^2+b^2}{a^2}\right)^{1/2}dx$$



Aplicando (I) se tiene:

$$S_x = 2\pi\int_0^a y\,dS$$

$$S_x = 2\pi\int_0^a \frac{b}{a}x\left(\frac{a^2+b^2}{a^2}\right)^{1/2}dx$$

$$S_x = \frac{2\pi b}{a^2}(a^2+b^2)^{1/2}\int_0^a x\,dx$$

$$= \frac{\pi b}{a^2}(a^2+b^2)^{1/2}x^2\Big]_0^a = \pi b\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\to S_x = \pi b\sqrt{a^2+b^2}$$

3.- Hallar por integración el área lateral del cono que se engendra cuando la recta $y = 2x$ desde $x = 0$, $x = 2$, gira

a) alrededor de OX;

b) alrededor de OY

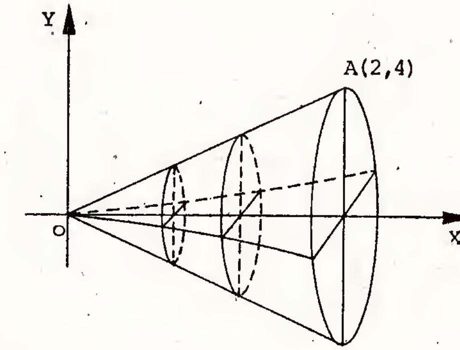
verificar el resultado geométricamente.

Solución.

a) aquí $\frac{dy}{dx} = 2$;

$$y = 2x$$

$$\to dS = \sqrt{5}\,dx$$



Aplicando (I) se tiene:

$$S_x = 2\pi\int_0^2 y\,dS$$

$$S_x = 4\pi\sqrt{5}\int_0^2 x\,dx$$

$$S_x = 2\sqrt{5}.\pi x^2\Big]_0^2 = 8\sqrt{5}\,\pi$$

$$S_x = 8\sqrt{5}\,\pi$$

Comprobando geométricamente:

por definición del área lateral de cono se tiene:

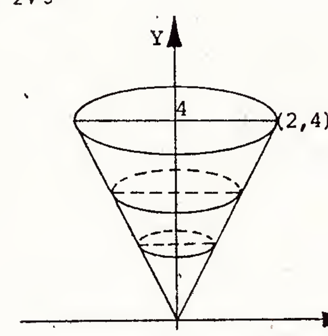
$$A_L = \pi r g\ , \quad \text{donde} \quad g = \sqrt{h^2+r^2}$$

$$r = 4;\quad h = 2 \quad \to \quad g = 2\sqrt{5}$$

$$\to \quad A_L = 8\sqrt{5}\,\pi$$

b) aquí $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}$

$$dS = \frac{1}{2}\sqrt{5}\,dy$$



Aplicando (e)

$$S_y = 2\pi\int_0^4 x\,dS = 2\pi\int_0^4 \frac{1}{4}\, y\,\sqrt{5}\,dy$$

$$S_y = \frac{1}{2}\sqrt{5}\,\pi\int_0^4 y\,dy = \left[\frac{1}{4}\sqrt{5}\,\pi y^2\right]_0^4 = 4\sqrt{5}\,\pi$$

geométricamente.

$A_L = \pi r g$ donde $g = \sqrt{h^2 + r^2}$

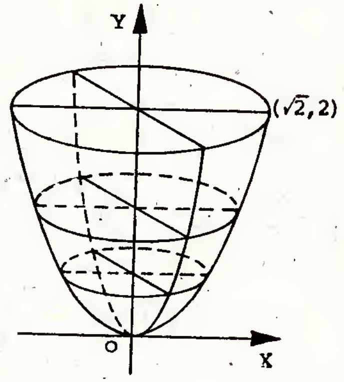
$\rightarrow\ r = 2,\ h = 4 \ \rightarrow\ g = 2\sqrt{5}$

$A_L = 4\sqrt{5}\,\pi$

4.- Hallar el área de la superficie que se engendra cuando el arco de la parábola $y = x^2$ desde $y = 0$ a $y = 2$ gira alrededor de OY.

Solución.

aquí $\frac{dy}{dx} = 2x;\quad y = x^2$



$$dS = (1 + 4x^2)^{1/2}dx$$

$$= (1 + 4x^2)^{1/2}dx$$

$$\rightarrow S_y = 2\pi\int_0^{\sqrt{2}} x\,ds =$$

$$= 2\pi\int_0^{\sqrt{2}} x(1 + 4x^2)^{1/2}dx$$

$$\frac{1}{4}\pi\int_0^{\sqrt{2}} (1 + 4x^2)^{1/2}d(1 + 4x^2)$$

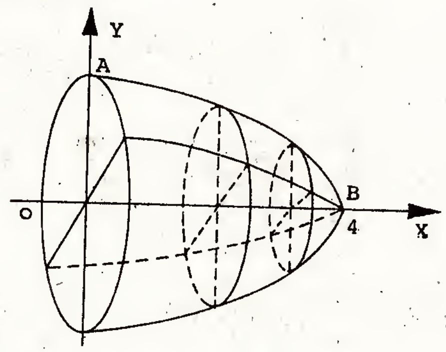
$$\rightarrow S_y = \left[\frac{1}{6}\pi(1 + 4x^2)^{3/2}\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{13}{3}\pi$$

$$S_y = \frac{13}{3}\pi$$

5.- Hallar el área de la superficie que se obtiene haciendo girar alrededor de OX el arco de la parábola $y^2 = 4 - x$ que esta dentro del primer cuadrante.

Solución.

Aquí $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2\sqrt{4 - x}}$



$$dS = \left(1 + \frac{1}{4(4-x)}\right)^{1/2} dx\ ;$$

$$dS = \left(\frac{17 - 4x}{4(4-x)}\right)^{1/2} dx$$

$$S_x = 2\pi\int_0^4 y\,dS = 2\pi\int_0^4 (4 - x)^{1/2}\left(\frac{17 - 4x}{4(4 - x)}\right)^{1/2}dx =$$

$$= \pi\int_0^4 \sqrt{17 - 4x}\,dx$$

$u = 17 - 4x \ \rightarrow\ -\frac{du}{4} = dx$, en la integral se tiene:

$$S_x = -\frac{1}{4}\pi\int_0^4 u^{1/2}du = \left[-\frac{\pi}{6}u^{3/2}\right]_0^4 = \left[-\frac{\pi}{6}(17 - 4x)^{3/2}\right]_0^4$$

$$S_x = \frac{\pi}{6}(70.09 - 1) = 36.18$$

$$\rightarrow S_x = 36.18$$

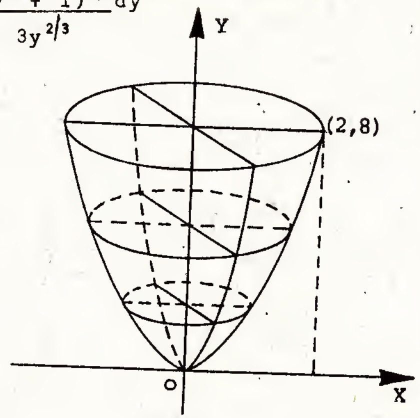
6.- Hallar el área de la superficie que se obtiene haciendo girar el arco de la curva $y = x^3$ desde $(0,0)$ a $(2,8)$ alrededor de OY.

Solución.

Aquí $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3y^{2/3}}$

$$dS = \left(1 + \frac{1}{9y^{4/3}}\right)^{1/2}dy = \frac{(9y^{4/3} + 1)^{1/2}}{3y^{2/3}}\,dy$$

$$S_y = 2\pi\int_0^4 x\,dS = 2\pi\int_0^4 \frac{y^{1/3}(9y^{4/3}+1)^{1/2}dy}{3y^{2/3}}$$



$$\to S_y = \frac{2}{3}\pi\int_0^4 \frac{(9y^{4/3}+1)^{1/2}}{y^{1/3}}\,dy$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{2}{3}\pi\int_0^4 \frac{(9y^{4/3}+1)^{1/2}}{y^{1/3}}\,dy \;;$$

por ser una integral impropia.

haciendo la sustitución.

$$u^2 = 9y^{4/3}+1 \to y = \frac{1}{9}(u^2-1)^{3/4};$$

$$dy = \frac{u\,du}{6(u^2-1)^{1/4}} \quad \text{en la integral se tiene:}$$

$$S_y = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{2}{3}\pi\int_E^8 \frac{\frac{u^2du}{6(u^2-1)^{1/4}}}{(u^2-1)^{1/4}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{9}\pi\int_E^8 \frac{u^2du}{(u^2-1)}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{ \frac{1}{9}\pi\int_E^8 du + \frac{1}{9}\pi\int_E^8 \frac{du}{u^2-1}\right\}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{9}\pi\left[u + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{u-1}{u+1}\right)\right]_\varepsilon^8$$

pero: $u = \sqrt{9y^{4/3}+1}$

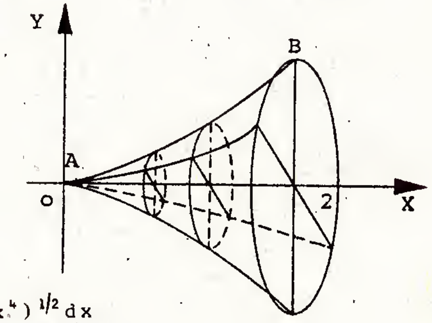
$$S_y = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{9}\pi\left[(9y^{4/3}+1)^{1/2} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{9y^{4/3}+1}-1}{\sqrt{9y^{4/3}+1}+1}\right]_\varepsilon^8$$

Hallar el área de la superficie que se engendra cuando **c/u de** las curvas gira alrededor de OX.

7.- $9y = x^3$; desde $x = 0$, $x = 2$

Solución.

aquí $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{3}$



$$dS = \left(1 + \frac{x^4}{9}\right)^{1/2}dx =$$

$$= \frac{(9+x^4)^{1/2}}{3}\,dx$$

$$S_x = 2\pi\int_0^2 y\,dS = \frac{2\pi}{27}\int_0^2 x^3(9+x^4)^{1/2}dx$$

Haciendo:

$$u = x^4 + 9 \to \frac{du}{4} = x^3dx$$

en la integral se tiene:

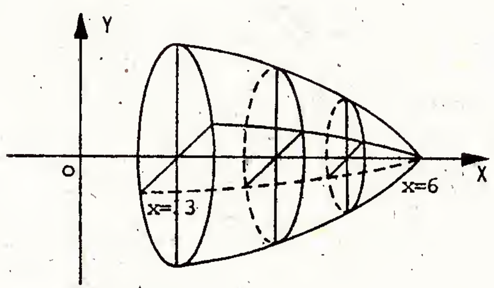
$$S_x = \frac{2\pi}{(27)(4)}\int_0^2 u^{1/2}du = \left[\frac{\pi}{81}u^{3/2}\right]_0^2 = \left[\frac{\pi}{81}(9+x^4)^{3/2}\right]_0^2$$

$$S_x = \frac{98}{81}\pi$$

8.- $y^2 = 24 - 4x$ desde $x = 3$, $x = 6$

Solución :

aquí $\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{\sqrt{24-4x}}$



$$dS = \left(1 + \frac{4}{24-4x}\right)^{1/2}dx$$

$$= \left(\frac{28-4x}{24-4x}\right)^{1/2}dx$$

$$\to S_x = 2\pi\int_3^6 (24-4x)^{1/2}\left(\frac{28-4x}{24-4x}\right)^{1/2}dx$$

$$S_x = 2\pi\int_3^6 (28-4x)^{1/2}dx$$

Haciendo $u = 28 - 4x \to -\frac{du}{4} = dx$

en la integral se tiene:

$$S_x = -\frac{\pi}{2}\int_3^6 u^{1/2}du = \left[-\frac{\pi}{3}(u^{3/2})\right]_3^6 = \left[-\frac{\pi}{3}(28-4x)^{3/2}\right]_3^6 =$$

$$S_x = \frac{56}{3}\pi$$

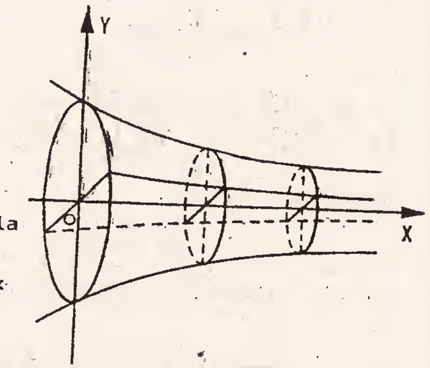
9.- $y = e^{-x}$; desde $x = 0$, $x = \infty$

Solución :

$\frac{dy}{dx} = -e^{-x}$

$= (1 + e^{-2x})^{1/2}dx$

$S_x = 2\pi\int_0^\infty e^{-x}(1 + e^{-2x})^{1/2}dx$



es una integral impropia de la forma

$$\int_a^{+\infty}\phi(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b \phi(x)dx$$

$$\to S_x = \lim_{b\to+\infty} 2\pi\int_0^b e^{-x}(1 - e^{-2x})^{1/2}dx$$

Haciendo la sustitución $z = e^{-x} \to dz = e^{-x}dx$;

en la integral se tiene:

$$S_x = \lim_{b\to\infty} 2\pi\int_0^b (1 - z^2)^{1/2}(-dz) = -\lim_{b\to+\infty} 2\pi\int_0^b (1+z^2)^{1/2}dz$$

$$S_x = -\lim_{b\to+\infty} \pi(z\sqrt{1+z^2} + \ln(z + \sqrt{z^2+1})\Big]_0^b$$

pero: $z = e^{-x}$

$$\to S_x = -\lim_{b\to\infty} \pi\left[e^{-x}\sqrt{1+e^{-2x}} + \ln(e^{-x} + \sqrt{e^{-2x}+1}\right]_0^b$$

$$\to S_x = \pi\lim_{b\to\infty}\left[\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}) - e^{-b}\sqrt{1+e^{-2b}} - \right.$$

$$\left. - \ln(e^{-b} + \sqrt{e^{-2b}+1})\right]$$

$$S_x = \pi\left[\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\right]$$

10. $6a^2xy = x^4 + 3a^4$ desde $x = a$, $x = 2a$

Solución :

Aquí $y = \frac{1}{6a^2}\left(\frac{x^4+3a^4}{x}\right) \to \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{x^4-a^4}{x^2}\right)$

$$dS = \left(1 + \frac{(x^4-a^4)^2}{4a^4x^4}\right)^{1/2}dx = \frac{x^4+a^4}{2a^2x^2}dx$$

$$\to S_x = 2\pi\int_a^{2a} ydS = \frac{\pi}{6a^4}\int_a^{2a}\frac{(x^4+3a^4)(x^4+a^4)}{x^3}dx =$$

$$= \frac{\pi}{6a^4}\int_a^{2a}\frac{x^8+4a^4x^4+3a^8}{x^3}dx$$

$$S_x = \frac{\pi}{6a^4}\left\{\int_a^{2a}x^5dx + 4a^4\int_a^{2a}xdx + 3a^8\int_a^{2a}x^{-3}dx\right\}$$

$$S_x = \frac{\pi}{6a^4}\left[\frac{x^6}{6} + 2a^4x^2 - \frac{3a^8}{2x^2}\right]_a^{2a} \to S_x = \frac{47}{16}\pi$$

11. La cicloide: $\begin{cases} x = a(\theta - \text{sen}\,\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$

Solución.

Aquí $\frac{dx}{d\theta} = a(1 - \cos\theta)$; $\frac{dy}{d\theta} = a\,\text{sen}\,\theta$

$$dS = (a^2(1-\cos\theta)^2 + a^2\text{sen}^2\theta)^{1/2}d\theta = a\left[2(1-\cos\theta)\right]^{1/2}d\theta$$

$$= 2a\,\text{sen}\,\frac{1}{2}\theta d\theta$$

$$\to S_x = 2\pi\int_0^\pi ydS = 8\pi a^2\int_0^\pi \text{sen}^3\frac{1}{2}\theta d\theta =$$

$$= 8\pi a^2\left\{\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta d\theta - \int_0^{\pi}\cos^2\frac{1}{2}\theta \operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta d\theta\right\}$$

$$S_x = 16\pi a^2\left[-\cos\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{3}\cos^3\frac{1}{2}\theta\right]_0^{\pi}$$

$$\to \quad S_x = \frac{64}{3}\pi a^2$$

12. La cardioide: $\begin{cases} x = a(2\cos\theta - \cos 2\theta) \\ y = a(2\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen} 2\theta)\end{cases}$

Solución.

aquí $\frac{dx}{d\theta} = a(-2\operatorname{sen}\theta + 2\operatorname{sen}2\theta)$; $\frac{dy}{d\theta} = a(2\cos\theta - 2\cos 2\theta)$

$$dS = \left[a^2(2\operatorname{sen}2\theta - 2\operatorname{sen}\theta)^2 + a^2(2\cos\theta - 2\cos 2\theta)^2\right]^{1/2} d\theta$$

$$dS = 2a(2 - 2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}2\theta - 2\cos\theta\cos 2\theta)^{1/2} d\theta$$

$$dS = 2\sqrt{2}\, a(1 - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}2\theta - \cos 2\theta\cos 2\theta)^{1/2} d\theta$$

$$dS = 2\sqrt{2}\, a(1 - \cos\theta)^{1/2}$$

$$\therefore \quad S_x = 4\sqrt{2}\,\pi a^2\int_0^{\pi}(2\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}2\theta)(1 - \cos\theta)^{1/2} d\theta$$

$$S_x = 4\sqrt{2}\,\pi a^2\int_0^{\pi}(2\operatorname{sen}\theta - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)(1 - \cos\theta)^{1/2} d\theta$$

$$S_x = 8\sqrt{2}\,\pi a^2\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\theta(1 - \cos\theta)^{3/2} d\theta$$

$$\to \quad S_x = \frac{16\sqrt{2}\,\pi a^2}{5}\left[(1 - \cos\theta)^{5/2}\right]_0^{\pi} = \frac{128}{5}\pi a^2$$

$$\to \quad S_x = \frac{128}{5}\pi a^2$$

13. $x^2 + y^2 = 4$; desde $x = 1$; $x = 3$

Solución.

aquí $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$; $y = \sqrt{4 - x^2}$

$$dS = \left(1 + \frac{x^2}{4 - x^2}\right)^{1/2} dx = \left(\frac{4}{4 - x^2}\right)^{1/2} dx$$

$$\to \quad S_x = 2\pi\int_1^3 y\,dS = 2\pi\int_1^3 (4 - x^2)^{1/2}\left(\frac{4}{4 - x^2}\right)^{1/2} dx =$$

$$= 4\pi\int_1^3 dx = 4\pi x\Big]_1^3$$

$$S_x = 8\pi$$

Hallar el área de la superficie que se obtiene al hacer girar c/u de las siguientes curvas alrededor de OY.

14. $x = y^3$; desde $y = 0$; $y = 3$

Solución.

aquí $\frac{dx}{dy} = 3y^2$; $dS = (1 + 9y^4)^{1/2} dy$

$$\to \quad S_y = 2\pi\int_0^3 x\,dS = 2\pi\int_0^3 y^3(1 + 9y^4)^{1/2} dy$$

$$= \frac{\pi}{18}\int_0^3 (1 + 9y^4)^{1/2} d(1 + 9y^4)$$

$$S_y = \left[\frac{\pi}{27}(1 + 9y^4)^{3/2}\right]_0^3 = \frac{\pi}{27}\left[(730)^{3/2} - 1\right] = 730.46\,\pi$$

15. $6a^2xy = x^4 + 3a^4$ desde $x = a$; $x = 3a$

Solución.

aquí $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2a}\left(\frac{x^4 - a^4}{x^2}\right)$

$$dS = \frac{x^4 + a^4}{2a^2x^2} dx$$

$$\to \quad S_y = 2\pi\int_a^{3a} x\,dS = \frac{\pi}{a^2}\int_a^{3a} x\,\frac{x^4 + a^4}{x^2} dx =$$

$$= \frac{\pi}{a^2}\left\{\int_a^{3a} x^3 dx + a^4\int\frac{dx}{x}\right\}$$

$$S_y = \frac{\pi}{a^2}\left[\frac{x^4}{4} + a^4\ln x\right]_a^{3a} = \frac{\pi}{a^2}\left[\frac{81}{4}a^4 + a^4\ln 3a - \frac{a^4}{4} - a^4\ln a\right]$$

$\to S_y = (20 + \ln(3))\pi a^2$

16. $2y = x\sqrt{x^2 - 1} + \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$ desde $x = 2$; $x = 5$

Solución.

aquí $\frac{dy}{dx} = (x^2 - 1)^{1/2}$; $ds = (1 + (x^2 - 1))^{1/2}dx = xdx$

$$\to S_y = 2\pi\int_2^5 x\,ds = 2\pi\int_2^5 x^2 dx = \frac{2\pi x^3}{3}\Big]_2^5 = 78\pi$$

$\to S_y = 78\pi$

Hallar el área de la superficie que se engendra cuando c/u de las siguientes curvas gira alrededor de OX ó OY.

17. La elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (alrededor de OY)

Solución.

aquí $\frac{dx}{dy} = \frac{-ay}{b\sqrt{b^2 - y^2}}$; $x = \frac{a}{b}(b^2 - y^2)^{1/2}$

$$\to dS = \left(1 + \frac{a^2y^2}{b^2(b^2 - y^2)}\right)^{1/2} dy = \left[\frac{b^4 + (a^2 - b^2)y^2}{b^2(b^2 - y^2)}\right]^{1/2} dy$$

$$\to \frac{S_y}{2} = 2\pi\int_0^b x\,dS = 2\pi\,\frac{a}{b^2}\int_0^b (b^2 - y^2)^{1/2}\left[\frac{b^4 + (a^2 - b^2)y^2}{b^2 - y^2}\right]^{1/2} dy$$

$$S_y = \frac{4\pi a}{b^2}\int_0^b \left[b^4 + (a^2 - b^2)y^2\right]^{1/2} dy =$$

$$= \frac{4\pi a}{b^2}(a^2 - b^2)^{1/2}\int_0^b\left[\frac{b^4}{a^2 - b^2} + y^2\right]^{1/2} dy$$

$$S_y = 4\pi\,\frac{a}{b^2}(a^2 - b^2)^{1/2}\left[\frac{1}{2}\,y\sqrt{\frac{b^4}{a^2 - b^2} + y^2}\right. +$$

$$\left. + \frac{1}{2}\,\frac{b^4}{a^2 - b^2}\ln\left(y + \sqrt{\frac{b^4}{a^2 - b^2} + y^2}\right)\right]_0^b$$

$$S_y = 2\pi a^2 + \frac{2\pi ab^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\ln\left(\frac{b + \frac{ab}{\sqrt{a^2 - b^2}}}{\frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}}\right)$$

pero: $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \to \frac{1}{e} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}$

$$\to S_y = 2\pi a^2 + \frac{2\pi b^2}{e}\ln\left(\frac{\frac{2 + 1}{e}}{\frac{\sqrt{1 - e^2}}{e}}\right) = 2\pi a^2 + \frac{2\pi b^2}{e}\ln\left(\frac{1 + e}{1 - e}\right)^{1/2}$$

$$S_y = 2\pi a^2 + \frac{\pi b^2}{e}\ln\frac{1 + e}{1 - e}$$

18. La catenaria $y = \frac{9}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$ desde $x = 0$, $x = a$ (alrededor de OX).

Solución.

aquí $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^{x/a} - e^{-x/a})$

$$dS = \left(1 + \frac{1}{4}e^{2x/a} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2x/a}\right)^{1/2} dx = \frac{1}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})ds$$

$$S_x = \frac{\pi a}{2}\int_0^a (e^{x/a} + e^{-x/a})^2 dx = \frac{\pi a}{2}\int_0^a (e^{2x/a} + 2 + e^{-2x/a})dx$$

$$S_x = \frac{\pi a}{2}\left[\frac{9}{2}e^{2x/a} + 2 - e^{-2x/a}\right]_0^a = \frac{\pi a}{2}\left[\frac{9}{2}e^2 + 2a - \frac{9}{2}e^{-2}\right]$$

$$\to S_x = \frac{\pi a^2}{4}(e^2 + 4 - e^{-2})$$

19. $\begin{cases} x = e^\theta \operatorname{sen}\theta \\ y = e^\theta \cos\theta \end{cases}$ desde $\theta = 0$; $\theta = \frac{\pi}{2}$ alrededor de OX.

Solución.

aquí $\frac{dx}{d\theta} = e^\theta\cos\theta + e^\theta\operatorname{sen}\theta$;

$$\frac{dy}{d\theta} = e^{\theta}\cos\theta - e^{\theta}\operatorname{sen}\theta$$

$$dS = (e^{2\theta}(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)^2 + e^{2\theta}(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)^2)^{1/2} d\theta$$

$$dS = e^{\theta}(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 1 - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 1)^{1/2} d\theta$$

$$dS = \sqrt{2}\, e^{\theta} d\theta$$

$$\rightarrow \quad S_x = 2\sqrt{2}\pi \int_0^{\pi/2} e^{2\theta}\cos\theta d\theta \quad \ldots\ldots (x)$$

empleando el artificio de la integración por partes se tiene que:

$$\int_0^{\pi/2} e^{2\theta}\cos\theta d\theta = e^{2\theta}\operatorname{sen}\theta + 2e^{2\theta}\cos\theta - 4\int_0^{\pi/2} e^{2\theta}\cos\theta d\theta$$

$$\rightarrow \int_0^{\pi/2} e^{2\theta}\cos\theta d\theta = \frac{1}{5}(e^{2\theta}\operatorname{sen}\theta + 2e^{2\theta}\cos\theta)$$

en (x) se tiene que:

$$\rightarrow \quad 2\sqrt{2}\pi \int_0^{\pi/2} e^{2\theta}\cos\theta d\theta = \frac{2\sqrt{2}\pi}{5}\Big[e^{2\theta}\operatorname{sen}\theta + 2e^{2\theta}\cos\theta\Big]_0^{\pi/2}$$

$$\rightarrow \quad S_x = \frac{2\sqrt{2}\pi}{5}(e^{\pi} - 2)$$

20. Hallar el área de la superficie que se engendra cuando se hace girar alrededor de OX el arco de la curva cuya ecuación es:

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x} \; ; \text{ desde } \quad x = 1; \quad x = 3$$

Solución.

aquí: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2x^2}$

$$\rightarrow ds = \left[1 + \frac{1}{4}\left(x^4 - 2 + \frac{1}{x^4}\right)\right]^{1/2} dx = \frac{x^4 + 1}{2x^2}\,dx$$

$$\rightarrow S_x = 2\pi\int_1^3 y\,ds = 2\pi\int_1^3 \left(\frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}\right)\left(\frac{x^4 + 1}{2x^2}\right)dx$$

$$S_x = \frac{\pi}{6}\int_1^3 \frac{(x^4 + 3)(x^4 + 1)}{x^3}\,dx = \frac{\pi}{6}\int_1^3 \left(x^5 + 4x + \frac{3}{x^3}\right)dx$$

$$S_x = \frac{\pi}{6}\left[\frac{x^6}{6} + 2x^2 - \frac{3}{2x^2}\right]_1^3 = \frac{208\pi}{9}$$

$$\rightarrow S_x = \frac{208\pi}{9}$$

CAPITULO XVI

ARTIFICIOS DE INTEGRACION

EN EL CALCULO INTEGRAL FRECUENTEMENTE SE UTILIZAN LOS SIGUIENTES ARTIFICIOS.

1) Integración por partes
2) Aplicación de la teoría de fracciones racionales
3) Empleo de una sustitución conveniente

INTEGRACION DE FRACCIONES RACIONALES

CASO I: Los factores del denominador son todo de primer grado, y ningún factor se repite, es decir podemos descomponer en suma de fracciones de la forma:

$$\frac{A}{(x-a)}, \frac{B}{(x-b)}, \ldots\ldots$$

CASO II: Cuando los factores del denominador son todos de primer grado y algunos se repiten $(x-a)^n$ y se escribe de la siguiente forma.

$$\frac{A}{(x-a)^n} + \frac{B}{(x-a)^{n-1}} + \ldots\ldots + \frac{L}{x-a},$$

donde A, B, ... , L son constantes :

PROBLEMAS

VERIFICAR LAS SIGUIENTES INTEGRACIONES:

1.- $\displaystyle\int \frac{(4x-2)}{x^3-x^2-2x}\,dx$

Solución :

$$\frac{4x-2}{x^3-x^2-2x} = \frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$$

$$4x-2 = A(x-2)(x+1) + B(x+1)(x) + C(x-2)(x)$$

$$4x-2 = (A+B+C)x^2 + (-A+B-2C)x - 2A$$

Igualando los coeficientes de la misma potencia de x, se tiene.

$$\left.\begin{array}{r} A+B+C=0 \\ -A+B-2C=4 \\ -2A=-0 \end{array}\right\} \rightarrow A=1,\quad B=1,\quad C=-2$$

$$\rightarrow \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}\right)dx = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x-2} - 2\int \frac{dx}{x+1}$$

$$= \mathrm{Ln}\,x + \mathrm{Ln}(x-2) - 2\mathrm{Ln}(x+1) + C$$

$$= \mathrm{Ln}\,x(x-2) + \mathrm{Ln}\frac{1}{(x+1)^2} + C$$

$$= \mathrm{Ln}\frac{x^2-2x}{(x+1)^2} + C$$

2.- $\displaystyle\int \frac{(5x^2-3)dx}{x^3-x}$

Solución :

$$= \frac{5x^2-3}{x^3-x} = \frac{5x^2-3}{x(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$$

$$= A(x^2-1) + B(x-1)(x) + C(x+1)(x)$$

$$5x^2-3 = (A+B+C)x^2 + (-B+C)x - A$$

Igualando los coeficientes de la misma potencia de X, se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} A+B+C=5 \\ -B+C=0 \\ -A=-3 \end{array}\right\} \rightarrow A=3,\quad B=1,\quad C=1$$

$$\rightarrow \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}\right)dx = 3\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{x-1}$$

$$= 3\,\mathrm{Ln}\,x + \mathrm{Ln}(x+1) + \mathrm{Ln}(x-1) + C$$

$$= \mathrm{Ln}\, x^3(x+1)(x-1) + C = \mathrm{Ln}\, x^3(x^2-1) + C$$

3.- $\displaystyle\int \frac{(4x+3)dx}{4x^3+8x^2+3x} = \frac{1}{4}\int \frac{(4x+3)dx}{x^3+2x^2+\frac{3}{4}x}$

Solución :

$$\frac{4x+3}{x^3+2x^2+\frac{3}{4}x} = \frac{4x+3}{x(x+1/2)(x+3/2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1/2} + \frac{C}{x+3/2}$$

$$= A(x+1/2)(x+3/2) + B(x+3/2)x + C(x+1/2)x$$

$$4x+3 = (A+B+C)x^2 + (2A+\frac{3}{2}B+\frac{1}{2}C)x + \frac{3}{4}A$$

Igualando los coeficientes de la misma potencia de X, se tiene.

$$\left.\begin{aligned} A+B+C&=0\\ 2A+\frac{3}{2}B+\frac{1}{2}C&=4\\ \frac{3}{4}A&=3\end{aligned}\right\} \rightarrow A=4,\quad B=-2,\quad C=-2$$

$$\rightarrow \frac{1}{4}\int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1/2} + \frac{C}{x+3/2}\right) dx =$$

$$= \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{4}\int \frac{2dx}{x+1/2} - \frac{1}{4}\int \frac{2dx}{x+3/2}$$

$$= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{2x+1} - \int \frac{dx}{2x+3} = \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{d(2x+1)}{2x+1} -$$

$$- \frac{1}{2}\int \frac{d(2x+3)}{2x+3}$$

$$= \mathrm{Ln}\, x - \frac{1}{2}\mathrm{Ln}(2x+1) - \frac{1}{2}\mathrm{Ln}(2x+3) + C$$

$$= \frac{1}{2}(2\,\mathrm{Ln}\, x - \mathrm{Ln}(2x+1) - \mathrm{Ln}(2x+3)) + C$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{x^2}{(2x+1)(2x+3)} + C$$

4.- $\displaystyle\int \frac{(4x^3+2x^2+1)dx}{4x^3-x}$

Solución :

$$\frac{4x^3+2x^2+1}{4x^3-x} = 1 + \frac{2x^2+x+1}{4x^3-x} = 1 + \frac{2x^2+x+1}{x(4x^2-1)}$$

$$= 1 + \frac{2x^2+x+1}{x(2x+1)(2x-1)}$$

$$\rightarrow \frac{2x^2+x+1}{x(2x+1)(2x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x+1} + \frac{C}{2x-1}$$

$$2x^2+x+1 = A(4x^2-1) + B(2x-1)(x) + C(2x+1)(x)$$

$$2x^2+x+1 = (4A+2B+2C)x^2 + (-B+C)x - A$$

igualando los coeficientes de la misma potencia de x, se tiene:

$$\left.\begin{aligned} 4A+2B+2C&=2\\ -B+C&=1\\ -A&=1\end{aligned}\right\} \rightarrow A=-1,\quad B=1,\quad C=2$$

$$\rightarrow \int \left(1 + \frac{A}{x} + \frac{B}{2x+1} + \frac{C}{2x-1}\right)dx = \int dx - \int \frac{dx}{x} +$$

$$+ \int \frac{dx}{2x+1} + 2\int \frac{dx}{2x-1}$$

$$= \int dx - \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{d(2x+1)}{2x+1} + \int \frac{d(2x-1)}{2x-1}$$

$$= x - \mathrm{Ln}(x) + \frac{1}{2}\mathrm{Ln}(2x+1) + \mathrm{Ln}(2x-1) + C$$

$$= x - \frac{1}{2}[2\ln(x) + \ln(2x+1) + 2\ln(2x-1)] + C$$

$$= x + \frac{1}{2}\left(\mathrm{Ln}\frac{1}{x^2} + \mathrm{Ln}(2x+1) + \mathrm{Ln}(2x-1)^2\right) + C$$

$$= x + \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{(2x+1)(2x-1)^2}{x^2} + C$$

5.- $\int \frac{z^2 dz}{(z-1)^3}$

Solución :

$$\rightarrow \frac{z^2}{(z-1)^3} = \frac{A}{(z-1)^3} + \frac{B}{(z-1)^2} + \frac{C}{z-1}$$

$$z^2 = A + B(z-1) + C(z-1)^2$$

$$z^2 = Cz^2 + (B-2C)z + A - B + C$$

Igualando los coeficientes de las mismas potencias de x, se tiene:

$$C = 1$$

$$B - 2C = 0 \quad \rightarrow \quad A = 1, \ B = 2, \ C = 1$$

$$A - B + C = 0$$

$$\rightarrow \int \left(\frac{A}{(z-1)^3} + \frac{B}{(z-1)^2} + \frac{C}{z-1}\right)dz =$$

$$= \int \frac{dz}{(z-1)^3} + 2\int \frac{dz}{(z-1)^2} + \int \frac{dz}{z-1}$$

$$= -\frac{1}{2(z-1)^2} - \frac{2}{z-1} + \text{Ln}(z-1) + C$$

6.- $\int_1^2 \frac{(x-3)dx}{x^3 + x^2}$

Solución :

$$\frac{x-3}{x^3+x^2} = \frac{x-3}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+1}$$

$$= A(x+1) + B(x)(x+1) + Cx^2$$

$$x - 3 = (B+C)x^2 + (A+B)x + A$$

Igualando los coeficientes de la misma potencia de x, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} B + C = 0 \\ A + B = 1 \\ A = -3 \end{array}\right\} \quad A = -3, \ B = 4, \ C = -4.$$

$$A = -3$$

$$\rightarrow \int_1^2 \left(\frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+1}\right)dx = -3\int_1^2 \frac{dx}{x^2} + 4\int \frac{dx}{x} - 4\int \frac{dx}{x+1}$$

$$= \frac{3}{x} + 4\text{Ln}(x) - 4\text{Ln}(x+1)\Big]_1^2 = \frac{3}{x} + 4\ln\frac{x}{x+1}\Big]_1^2$$

$$= 4\ \text{Ln}\frac{4}{3} - \frac{3}{2} = -0.3492$$

7.- $\int_1^3 \frac{(2-x^2)dx}{x^3 + 3x^2 + 2x}$

Solución :

$$\frac{2-x^2}{x^3+3x^2+2x} = \frac{2x-x^2}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$$

$$= A(x^2+3x+2) + B(x+2)(x) + C(x+1)(x)$$

$$2 - x^2 = (A+B+C)x^2 + (3A+2B+C)x + 2A$$

Igualando los coeficientes de las mismas potencias de x, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} A + B + C = -1 \\ 3A + 2B + C = 0 \\ 2A = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \quad A = 1, \ B = -1, \ C = -1.$$

$$\rightarrow \int_1^3 \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}\right)dx = \int_1^3 \frac{dx}{x} - \int_1^3 \frac{dx}{x+1} - \int_1^3 \frac{dx}{x+2}$$

$$\rightarrow = \text{Ln}x - \text{Ln}(x+1) - \text{Ln}(x+2)\Big]_1^3 = \text{Ln}\frac{x}{(x+1)(x+2)}\Big]_1^3$$

$$= \text{Ln}(3) - \text{Ln}(4) - \text{Ln}(5) + \text{Ln}2 + \text{Ln}(3)$$

$$= \text{Ln}(3) - \text{Ln}2 - \text{Ln}2 - \text{Ln}5 + \text{Ln}2 + \text{Ln}3$$

$$= \text{Ln}\frac{9}{10} = -0.1054$$

8.- $\int_0^1 \frac{3x^2 + 7x}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx$

Solución :

$$\frac{3x^2 + 7x}{(x + 1)(x + 2)(x + 3)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{x + 3}$$

$$3x^2 + 7x = A(x + 2)(x + 3) + B(x + 1)(x + 3) + C(x+1)(x+2)$$

$$3x^2 + 7x = (A + B + C)x^2 + (5A + 4B + 3C)x + 6A+3B + 2C$$

Igualando los coeficientes de la misma potencia de x, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} A + B + C = 3 \\ 5A + 4B + 3C = 7 \\ 6A + 3B + 2C = 0 \end{array}\right\} A = -2,\ B = 2,\ C = 3$$

$$\rightarrow -2\int_0^1 \frac{dx}{x + 1} + 2\int_0^1 \frac{dx}{x + 2} + 3\int_0^1 \frac{dx}{x + 3} =$$

$$= [-2Ln(x + 1) + 2\ Ln(x + 2) + 3\ Ln(x + 3)$$

$$= -2Ln(x + 1) + 2Ln(x + 2) + 3Ln(x + 3)\Big]_0^1$$

$$= -2Ln(2) + 2Ln(3) + 3Ln(4) - 2Ln(2) - 3Ln(3)$$

$$= Ln4 - Ln3 = Ln\ \frac{4}{3} = 0.2877$$

9.- $\displaystyle\int_0^4 \frac{9x^2dx}{(2x + 1)(x + 2)^2}$

Solución :

$$\frac{9x^2}{(2x + 1)(x + 2)^2} = \frac{A}{2x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{(x + 2)}$$

$$9x^2 = A(x + 2)^2 + B(2x + 1) + C(2x + 1)(x + 2)$$

$$9x^2 = (A + 2C)x^2 + (4A + 5C + 2B)x + 4A + B + 2C$$

Igualando los coeficientes de la misma potencia de x, se tiene

$$\left.\begin{array}{l} A + 2C = 9 \\ 4A + 5C + 2B = 0 \\ 4A + B + 2C = 0 \end{array}\right\} A = 1,\ B = -12,\ C = 4$$

$$\rightarrow \int\left(\frac{A}{2x + 1} + \frac{B}{(x + 2)^2} + \frac{C}{x + 2}\right)dx =$$

$$= \int_0^4 \frac{dx}{2x + 1} - 12\int_0^4 \frac{dx}{(x + 2)^2} + 4\int_0^4 \frac{dx}{x + 2}$$

$$= \frac{1}{2}\ Ln(2x + 1) + \frac{12}{x + 2} + 4Ln(x + 2)\Big]_0^4 =$$

$$= \frac{1}{2}\ Ln(3)^2 + 2 + 4Ln6 - 6 + 4Ln(2)$$

$$= Ln(3) + 4Ln3 + 4Ln(2) - 4Ln(2) - 4 = 5Ln3 - 4 = 1.4930$$

10. $\displaystyle\int_0^5 \frac{(x^2 - 3)dx}{(x + 2)(x + 1)^2}$

Solución :

$$\frac{x^2 - 3}{(x + 2)(x + 1)^2} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{x + 1}$$

$$x^2 - 3 = A(x + 1)^2 + B(x + 2) + C(x + 2)(x + 1)$$

$$x^2 - 3 = (A + C)x^2 + (2A + B + 3C)x + A + 2B + 2C$$

Igualando los coeficientes de la misma potencia de x, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} A + C = 1 \\ 2A + B + 3C = 0 \\ A + 2B + 2C = -3 \end{array}\right\} A = 1,\ B = -2,\ C = 0$$

$$\rightarrow \int_0^5 \left(\frac{A}{x + 2} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{x + 1}\right)dx = \int_0^5 \frac{dx}{x + 2} - 2\int_0^5 \frac{dx}{(x + 1)^2}$$

$$= Ln(x + 2) + \frac{2}{x + 1}\Big]_0^5 = Ln7 + \frac{1}{3} - Ln2 - 2 =$$

$$= Ln\ \frac{7}{2} - \frac{5}{3} = -0.4139$$

Calcular cada una de las siguientes integrales

11. $\displaystyle\int \frac{8dx}{x^3 - 4x} = 8\int \frac{dx}{x(x^2 - 4)}$

Solución :

$$\frac{8}{x(x^2 - 4)} = \frac{8}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 2}$$

$$\rightarrow \quad 8 = A(x^2 - 4) + (x^2 + 2x)B + C(x^2 - 2x)$$

$$8 = (A + B + C)x^2 + (2B - 2C)x - 4A$$

Igualando coeficientes de las mismas potencias de x, se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} A + B + C = 0 \\ 2B - 2C = 0 \\ -4A = 8 \end{array}\right\} \text{de donde se obtiene } A = -2, \quad B = C = 1$$

$$\rightarrow \int \frac{8dx}{x^3 - 4x} = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 2}\right)dx$$

$$= \int \frac{-2dx}{x} + \int \frac{dx}{x - 2} + \int \frac{dx}{x + 2}$$

$$= -2\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x - 2} + \int \frac{dx}{x + 2}$$

$$= -2\,Lnx + Ln(x - 2) + Ln(x + 2) + C$$

$$= Ln\frac{1}{x^2} + Ln(x - 2) + Ln(x + 2) + C$$

$$= Ln\left[\frac{(x + 2)(x - 2)}{x^2}\right] + C$$

12. $\displaystyle\int \frac{5x^2 - 9}{x^3 - 9x} =$

Solución :

$$\rightarrow \frac{5x^2 - 9}{x^3 - 9x} = \frac{5x^2 - 9}{x(x - 3)(x + 3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 3} + \frac{C}{x + 3}$$

$$5x^2 - 9 = A(x^2 - 9) + B(x^2 + 3x) + C(x^2 - 3x)$$

$$5x^2 - 9 = (A + B + C)x^2 + (3B - 3C)x - 9A =$$

Igualando coeficientes de las mismas potencias de x, se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} A + B + C = 5 \\ 2B - 3C = 0 \\ -9A = -9 \end{array}\right\} \text{de donde se tiene: } A = 1, \quad B = C = 2$$

$$\rightarrow \int \frac{5x^2 - 9}{x^3 - 9x} = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x - 3} + \frac{C}{x + 3}\right)dx$$

$$= \int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{x - 3} + 2\int \frac{dx}{x + 3}$$

$$= Lnx + 2Ln(x - 3) + 2Ln(x + 3) + C$$

$$= Lnx\left[(x - 3)(x + 3)\right]^2 + C = Lnx(x^2 - 9)^2 + C$$

13. $\displaystyle\int \frac{3z + 7}{(z + 1)(z + 2)(z + 3)}\,dz$

Solución :

$$\frac{3z + 7}{(z + 1)(z + 2)(z + 3)} = \frac{A}{z + 1} + \frac{B}{z + 2} + \frac{C}{z + 3}$$

$$3z + 7 = A(z^2 + 5z + 6) + B(z^2 + 4z + 3) + C(z^2 + 3z + 2)$$

$$3z + 7 = (A + B + C)z^2 + (5A + 4B + 3C)z + 6A + 3B + 2C$$

igualando los coeficientes de la misma potencia de z se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} A + B + C = 0 \\ 5A + 4B + 3C = 3 \\ 6A + 3B + 2C = 7 \end{array}\right\} \rightarrow A = 2, \quad B = C = -1$$

$$\rightarrow \int \frac{(3z + 7)dz}{(z + 1)(z + 2)(z + 3)} = \int \left(\frac{A}{z + 1} + \frac{B}{z + 2} + \frac{C}{z + 3}\right)dz$$

$$= \int \frac{2dx}{z + 1} - \int \frac{dz}{z + 2} - \int \frac{dz}{z + 3}$$

$$= 2\,\mathrm{Ln}(z+1) - \mathrm{Ln}(z+2) - \mathrm{Ln}(z+3) + C$$

$$= \mathrm{Ln}(z+1)^2 + \mathrm{Ln}\left(\frac{1}{z+2}\right) + \mathrm{Ln}\left(\frac{1}{z+3}\right) + C$$

$$= \mathrm{Ln}\left[\frac{(z+1)^2}{(z+2)(z+3)}\right] + C$$

14. $\displaystyle\int \frac{3x^2+11x+2}{(x+3)(x^2-1)}\,dx$

Solución :

$$\rightarrow \frac{3x^2+11x+2}{(x+3)(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$$

$$\rightarrow 3x^2+11x+2 = A(x^2-1) + B(x^2+2x-3) + C(x^2+4x+3)$$

igualando los coeficientes de la misma potencia de x se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} A+B+C=3 \\ 2B+4C=11 \\ -A-3B+3C=2 \end{array}\right\} \text{de donde:} \quad C=2,\quad B=3/2,\quad A=-\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \int\left(\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}\right)dx = -\int\frac{1/2\,dx}{x+3} + \int\frac{3/2\,dx}{x+1} + \int\frac{2dx}{x-1}$$

$$= -\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+3} + \frac{3}{2}\int\frac{dx}{x+1} + 2\int\frac{dx}{x-1}$$

$$= -\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(x+3) + \frac{3}{2}\ln(x+1) + 2\mathrm{Ln}(x-1) + C$$

$$= \mathrm{Ln}\left(\frac{1}{x+3}\right)^{1/2} + \mathrm{Ln}(x+1)^{3/2} + \mathrm{Ln}(x-1)^2 + C$$

$$= \frac{\mathrm{Ln}(x+1)^{3/2}(x-1)^2}{(x+3)^{1/2}} + C$$

15. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(2x+3)(4x^2-1)}$

Solución :

$$\frac{x^2}{(2x+3)(4x^2-1)} = \frac{x^2}{(2x+3)(2x+1)(2x-1)} = \frac{A}{2x+3} + \frac{B}{2x+1} + \frac{C}{2x-1}$$

$$x^2 = A(4x^2-1) + B(4x^2+4x-3) + C(4x^2+8x+3)$$

$$x^2 = (4A+4B+4C)x^2 + (4B+8C)x - A - 3B + 3C$$

igualando los coeficientes de la misma potencia de x, se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} 4A+4B+4C=1 \\ 4B+8C=0 \\ -A-3B+3C=0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad C=\frac{1}{32},\quad B=-\frac{1}{16},\quad A=\frac{9}{32}$$

$$\rightarrow \int\frac{x^2dx}{(2x+3)(4x^2-1)} = \int\left(\frac{A}{2x+3} + \frac{B}{2x+1} + \frac{C}{2x-1}\right)dx$$

$$= \frac{9}{32}\int\frac{dx}{2x+3} - \frac{1}{16}\int\frac{dx}{2x+1} + \frac{1}{32}\int\frac{dx}{2x-1}$$

$$= \frac{9}{64}\int\frac{d(2x+3)}{2x+3} - \frac{1}{32}\int\frac{d(2x+1)}{2x+1} + \frac{1}{64}\int\frac{d(2x-1)}{2x-1}$$

$$= \frac{9}{64}\mathrm{Ln}(2x+3) - \frac{1}{32}\mathrm{Ln}(2x+1) + \frac{1}{64}\mathrm{Ln}(2x-1) + C$$

$$= \mathrm{Ln}\left[\frac{(2x+3)^{9/64}(2x-1)^{1/64}}{(2x+1)^{1/32}}\right] + C$$

16. $\displaystyle\int\frac{t^4+1}{t^3-t}\,dt = \int\left(t + \frac{t^2+1}{t^3-t}\right)dt = \int t\,dt + \int\frac{t^2+1}{t^3-t}\,dt$

$$\rightarrow \frac{t^2+1}{t^3-t} = \frac{t^2+1}{t(t+1)(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{t-1}$$

$$t^2 + 1 = A(t^2-1) + B(t^2-t) + C(t^2+t)$$

$$t^2 + 1 = (A+B+C)t^2 + (-B+C)t - A$$

igualando coeficientes de la misma potencia de t, se tiene:

$$\left.\begin{aligned} A + B + C &= 1 \\ +B + C &= 0 \\ -A &= 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow A = -1 , \quad B = 1 , \quad C = 1$$

$$\rightarrow \int \frac{t^4+1}{t^3-t}\,dt = \int t\,dt - \int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t+1} + \int \frac{dt}{t-1}$$

$$= \frac{t^2}{2} - \mathrm{Ln}t + \mathrm{Ln}(t+1) + \mathrm{Ln}(t-1) + C$$

$$= \frac{t^2}{2} + \mathrm{Ln}\,\frac{(t^2-1)}{t} + C$$

17. $\displaystyle\int \frac{x^2 - x - 5}{x^3 + 5x^2} \,.\, dx$

Solución :

$$\rightarrow \frac{x^2-x-5}{x^3+3x^2} = \frac{x^2-x-5}{x^2(x+5)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+5}$$

$$x^2 - x - 5 = A(x+5) + B(x^2+5x) + C(x^2)$$

$$x^2 - x - 5 = (B+C)x^2 + (A+5B)x + 5A$$

igualando coeficientes de la misma potencia de x, se tiene:

$$\left.\begin{aligned} B + C &= 1 \\ A + 5B &= -1 \\ 5A &= -5 \end{aligned}\right\} \rightarrow A = -1, \quad B = 0 , \quad C = 1$$

$$\rightarrow \int \left(\frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+5}\right)dx = -\int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{x+5} = \frac{1}{x} + \mathrm{Ln}(x+5) + C$$

18. $\displaystyle\int \frac{(5x^2 + 14x + 10)dx}{(x+2)(x+1)^2}$

Solución :

$$\frac{5x^2+14x+10}{(x+2)(x+1)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

$$5x^2 + 14x + 10 = A(x+1)^2 + B(x+2) + C(x+1)(x+2)$$

$$= (A+C)x^2 + (2A+B+3C)x + A + 2B + 2C$$

igualando los coeficientes de las mismas potencias de x,

$$\left.\begin{aligned} A + C &= 5 \\ 2A + B + 3C &= 14 \\ A + 2B + 2C &= 10 \end{aligned}\right\} \rightarrow B = 1, \quad C = 3, \; A = 2 .$$

$$\rightarrow \int \left(\frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1}\right)dx = 2\int \frac{dx}{x+2} + \int \frac{dx}{(x+1)^2}$$

$$+ 3\int \frac{dx}{x+1}$$

$$= 2\mathrm{Ln}(x+2) - \frac{1}{x+1} + 3\mathrm{Ln}(x+1) + C$$

$$= \mathrm{Ln}(x+2)^2(x+1)^3 - \frac{1}{x+1} + C$$

19. $\displaystyle\int \frac{(24y^2 + 10y + 5)dy}{(2y-1)(2y+1)^2}$

Solución :

$$\rightarrow \frac{24y^2+10y+5}{(2y-1)(2y+1)^2} = \frac{A}{2y-1} + \frac{B}{(2y+1)^2} + \frac{C}{2y+1}$$

$$24y^2 + 10y + 5 = A(2y+1)^2 + B(2y-1) + C(2y-1)(2y+1)$$

$$= (4A + 4C)y^2 + (4A + 2B)y + A - B - C$$

igualando los coeficientes de la misma potencia de y.

$$\left.\begin{array}{r} 4A + 4C = 24 \\ 4A + 2B = 10 \\ A - B - C \;\; = 5 \end{array}\right\} \rightarrow C = 2, \quad B = -3, \quad A = 4$$

$$\rightarrow \int \left(\frac{A}{2y - 1} + \frac{B}{(2y + 1)^2} + \frac{C}{2y + 1}\right) dy = \int \frac{4dy}{2y - 1} -$$

$$- \int \frac{3dy}{(2y + 1)^2} + \int \frac{2dy}{2y + 1}$$

$$= 2 \int \frac{d(2y - 1)}{2y - 1} - \frac{3}{2} \int \frac{d(2y + 1)}{(2y + 1)^2} + \int \frac{d(2y + 1)}{2y + 1}$$

$$= 2\, Ln(2y - 1) + \frac{3}{2} \frac{1}{(2y + 1)} + Ln(2y + 1) + C$$

$$= Ln(2y - 1)^2(2y + 1) + \frac{3}{2(2y + 1)} + C$$

20. $\displaystyle\int \frac{(x + 2)dx}{x^4 + 2x^3 + x^2} = \int \frac{(x+2)dx}{x^2(x + 1)^2}$

Solución :

$$\frac{x + 2}{x^2(x + 1)^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{(x + 1)^2} + \frac{D}{x + 1}$$

$$x + 2 = A(x + 1)^2 + Bx(x + 1)^2 + C(x^2) + D(x^2(x + 1)$$

$$= (A + 2B + C + D)x^2 + (2A + B)x + (B + D)x^3 + A$$

igualando los coeficientes de la misma potencia de x,

$$\left.\begin{array}{r} A + 2B + C + D = 0 \\ 2A + B = 1 \\ B + D = 0 \\ A = 2 \end{array}\right\} A = 2, \; B = -3, \; D = 3, \quad C = 1$$

$$\rightarrow \int \left(\frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{(x + 1)^2} + \frac{D}{x + 1}\right) dx =$$

$$= 2 \int \frac{dx}{x^2} - 3\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{(x + 1)^2} + 3 \int \frac{dx}{x + 1}$$

$$= -\frac{2}{x} - 3Lnx - \frac{1}{x + 1} + 3Ln(x + 1) + C$$

$$= Ln\left(\frac{x + 1}{x}\right)^3 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x + 1} + C$$

21. $\displaystyle\int \frac{(x^3 - 2x - 4)dx}{x^4 + 2x^3} = \int \frac{(x^3 - 2x - 4)dx}{x^3(x + 2)}$

Solución :

$$\frac{x^3 - 2x - 4}{x^3(x + 2)} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x + 2}$$

$$x^3 - 2x - 4 = A(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx^2(x + 2) + Dx^3$$

$$x^3 - 2x - 4 = (C + D)x^3 + (B + 2C)x^2 + (A + 2B)x + 2A$$

igualando los coeficientes de la misma potencia de x,

$$\begin{array}{l} C + D = 1 \\ B + 2C = 0 \\ A + 2B = -2 \\ \quad 2A = -4 \end{array} \longrightarrow A = -2, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = 1$$

$$\rightarrow \int \left(\frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x + 2}\right) dx = -2 \int \frac{dx}{x^3} + \int \frac{dx}{x + 2}$$

$$= \frac{1}{x^2} + Ln(x + 2) + C$$

22. $\displaystyle\int \frac{2x^2 + 1}{(x - 2)^3}$

Solución :

$$\frac{2x^2 + 1}{(x - 2)^3} = \frac{A}{(x - 2)^3} + \frac{B}{(x - 2)^2} + \frac{C}{x - 2}$$

$$2x^2 + 1 = A + B(x - 2) + C(x - 2)^2$$

$$2x^2 + 1 = Cx^2 + (B - 4C)x + A - 2B + 4C$$

igualando los coeficientes de la misma potencia de x,

$$\left.\begin{array}{l} C = 2 \\ B - 4C = 0 \\ A - 2B + 4C = 1 \end{array}\right\} \quad C = 2, \quad B = 8, \quad A = 9$$

$$\to \int \left(\frac{A}{(x-2)^3} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-2} \right) dx =$$

$$= 9 \int \frac{dx}{(x-2)^3} + 8 \int \frac{dx}{(x-2)^2} + 2 \int \frac{dx}{x-2}$$

$$= -\frac{9}{2}(x-2)^{-2} - 8(x-2)^{-1} + 2\operatorname{Ln}(x-2) + C$$

$$= -\frac{9}{2(x-2)^2} - \frac{8}{x-2} + \operatorname{Ln}(x-2)^2 + C$$

23. $\displaystyle\int \frac{(y^4 - 3y^3)dy}{(y^2-1)(y-1)} = \int \left(y - 2 + \frac{-y^2 - 2y + 2}{(y^2-1)(y-1)} \right) dy$

Solución :

$$= \int y dy - 2 \int dy + \int \frac{-y^2 - 3y + 2}{(y^2-1)(y-1)}$$

$$\to \frac{-y^2 - 3y + 2}{(y+1)(y-1)^2} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{(y-1)^2} + \frac{C}{y-1}$$

$$-y^2 - 3y + 2 = A(y-1)^2 + B(y+1) + C(y-1)(y+1)$$

$$-y^2 - 3y + 2 = (A + C)y^2 + (-2A + B)y + A + B - C$$

igualando los coeficientes de la misma potencia de y.

$$\left.\begin{array}{l} A + C = -1 \\ -2A + B = -3 \\ -A + B - C = 2 \end{array}\right\} \quad A = 1, \quad B = -1, \quad C = -2$$

$$\to \int y dy - 2 \int dy + \int \left(\frac{A}{y+1} + \frac{B}{(y-1)^2} + \frac{C}{y-1} \right) dy$$

$$= \frac{y^2}{2} - 2y + \int \frac{dy}{y+1} - \int \frac{dy}{(y-1)^2} - 2 \int \frac{dy}{y-1}$$

$$= \frac{y^2}{2} - 2y + \ln(y+1) + \frac{1}{y-1} - 2 \ln(y-1) + C$$

$$= \frac{y^2}{2} - 2y + \frac{1}{y-1} + \ln \frac{y+1}{(y-1)^2} + C$$

CASO III:

Cuando el denominador contiene factores de 2do grado $(x^2 + px + q)$ pero ninguno de estos se repite.

A todo factor no repetido de 2do grado, como $(x^2 + px + q)$, le corresponde una fracción parcial de la forma:

$$\frac{Ax + B}{x^2 + px + q}$$

El método de integrar una expresión de esta forma es:

Si $p \neq 0$, completamos el cuadrado en el denominador:

$$x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 + q - \frac{1}{4}p^2 = (x + \frac{1}{2}p)^2 \quad \frac{1}{4}(4q - p^2),$$

$$4q > p^2$$

Hagamos $u = x + \frac{1}{2}p \to x = u - \frac{1}{2}p$, $dx = du$, sustituyendo estos valores, la nueva integral, en función de la variable u es una integral conocida.

CASO IV:

Cuando el denominador contiene factores de 2do grado $(x^2 + px + q)$ y algunos de estos se repiten $(x^2 + px + q)^n$.

Entonces podemos descomponer en fracciones de la forma:

$$\frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{Cx + D}{(x^3 + px + q)^{n-1}} + \ldots\ldots + \frac{Lx + n}{x^2 + px + q}$$

Verificar las siguientes integraciones :

1. $$\int \frac{(4x^2+6)dx}{x^3+3x} = Ln(x^2)(x^2+3) + C$$

Solución : $$\frac{4x^2+6}{x^3+3x} = \frac{4x^2+6}{x(x^2+3)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+3}$$

$$4x^2 + 6 = Ax^2 + 3A + Bx^2 + Cx$$

$$4x^2 + 6 = (A + B)x^2 + Cx + 3A$$

igualando los coeficientes de la misma potencia de x, se tiene:

$$\begin{aligned} A + B &= 4 \\ C &= 0 \quad \rightarrow \quad A = 2,\ B = 2,\ C = 0 \\ 3A &= 6 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \int \left(\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+3}\right)dx = 2\int \frac{dx}{x} + \int \frac{2x\,dx}{x^2+3}$$

$$= 2\int \frac{dx}{x} + \int \frac{d(x^2+3)}{x^2+3} = 2Ln x + Ln(x^2+3) + C$$

$$= Ln\ x^2(x^2+3) + C$$

2. $$\int \frac{(x^2+x)dx}{(x-1)(x^2+1)} = Ln(x-1) + arctg\ x + C$$

Solución :

$$\rightarrow \frac{x^2+x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$= A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$$

$$x^2 + x = (A+B)x^2 + (C-B)x + A - C$$

igualando los coeficientes de la misma potencia de x, se tiene:

$$\left.\begin{aligned} A + B &= 1 \\ C - B &= 1 \\ A - C &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow A = 1,\ B = 0,\ C = 1$$

$$\rightarrow \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}\right) dx = \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= ln(x-1) + arctg x + C$$

3. $$\int \frac{(2t^2-8t-8)dt}{(t-2)(t^2+4)} = 2Ln \frac{t^2+4}{t-2} + C$$

Solución :

$$\frac{2t^2-8t-8}{(t-2)(t^2+4)} = \frac{A}{t-2} + \frac{Bt+C}{t^2+4} = At^2+4A+Bt^2+Ct-2Bt-2C$$

$$2t^2 - 8t - 8 = (A+B)t^2 + (C-2B)t + 4A - 2C$$

igualando los coeficientes de la misma potencia de t, se tiene:

$$\left.\begin{aligned} A + B &= 2 \\ C - 2B &= -8 \\ 4A - 2C &= -8 \end{aligned}\right\} A = -2,\ B = 4,\ C = 0$$

$$\rightarrow \int \left(\frac{A}{t-2} + \frac{Bt+C}{t^2+4}\right)dt = -2\int \frac{dt}{t-2} + 4\int \frac{t\,dt}{t^2+4}$$

$$= -2\int \frac{dt}{t-2} + 2\int \frac{d(t^2+4)}{t^2+4}$$

$$= -2\ Ln(t-2) + 2Ln(t^2+4) + C = 2Ln \frac{1}{t-2} + 2Ln(t^2+4) + C$$

$$= 2Ln \frac{t^2+4}{t-2} + C$$

4. $$\int \frac{(x^2+x-10)dx}{(2x-3)(x^2+4)} = \frac{1}{2} Ln \frac{x^2+4}{2x-3} + arctg \frac{x}{2} + C$$

Solución:

$$\frac{x^2+x-10}{(2x-3)(x^2+4)} = \frac{A}{2x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$$= Ax^2 + 4A + 2Bx^2 + 2Cx - 3Bx - 3C$$

$$x^2 + x - 10 = (A+2B)x^2 + (2C-3B)x + 4A - 3C$$

igualando los coeficientes de la misma potencia de x, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} A + 2B = 1 \\ 2C - 3B = 1 \\ 4A - 3C = -10 \end{array}\right\} A = 1, \quad B = 1, \quad C = 2$$

$$\rightarrow \int \left(\frac{A}{2x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+4}\right)dx = -\int \frac{dx}{2x-3} + \int \frac{x+2dx}{x^2+4}$$

$$= -\int \frac{dx}{2x-3} + \int \frac{xdx}{x^2+4} + 2\int \frac{dx}{x^2+4}$$

$$= -\frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}(2x-3) + \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}(x^2+4) + \mathrm{arctg}\,\frac{x}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\,\frac{1}{2x+3} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}(x^2+4) + \mathrm{arctg}\,\frac{x}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\,\frac{x^2+4}{2x-3} + \mathrm{arctg}\,\frac{x}{2} + C$$

5.- $\displaystyle\int \frac{(x-18)dx}{4x^3+9x} = \mathrm{Ln}\,\frac{4x^2+9}{x^2} + \frac{1}{6}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x}{3} + C$

Solución :

$$\frac{x-18}{x(4x^2+9)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{4x^2+9}$$

$$x - 18 = A(4x^2+9) + Bx^2 + Cx$$

$$= (4A+B)x^2 + Cx + 9A$$

igualando los coeficientes de las mismas potencias de x, se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} 4A + B = 0 \\ C = 1 \\ 9A = -18 \end{array}\right\} A = -2, \quad B = 8; \quad C = 1$$

$$\rightarrow \int \left(\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{4x^2+9}\right)dx = -2\int \frac{dx}{x} + \int \frac{8x+1}{4x^2+9}\,dx$$

$$= -2\int \frac{dx}{x} + \int \frac{8xdx}{4x^2+9} + \int \frac{dx}{4x^2+9}$$

$$= -2\,\mathrm{Ln}(x) + \mathrm{Ln}(4x^2+9) + \frac{1}{6}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x}{3} + C$$

$$= \mathrm{Ln}\left(\frac{4x^2+9}{x^2}\right) + \frac{1}{6}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x}{3} + C$$

6. $\displaystyle\int \frac{(2y^3+y^2+2y+2)dy}{y^4+3y^2+2} = \mathrm{Ln}\,(y^2+2) + \mathrm{arctg}y + C$

Solución :

$$\frac{2y^3+y^2+2y+2}{y^4+3y^2+2} = \frac{2y^3+y^2+2y+2}{(y^2+1)(y^2+2)} = \frac{Ay+B}{y^2+1} + \frac{Cy+D}{y^2+2}$$

$$2y^3 + y^2 + 2y + 2 = (Ay+B)(y^2+2) + (Cy+D)(y^2+1)$$

$$= (A+C)y^3 + (B+D)y^2 + (2A+C)y + 2B + D$$

igualando los coeficientes de las mismas potencias de y. se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} A + C = 2 \\ B + D = 1 \\ 2A + C = 2 \\ 2B + D = 2 \end{array}\right\} \rightarrow A = 0, \quad B = 1, \quad C = 2, \quad D = 0$$

$$\rightarrow \int \left(\frac{Ay+B}{y^2+1} + \frac{Cy+D}{y^2+2}\right)dy = \int \frac{dy}{y^2+1} + \int \frac{2ydy}{y^2+2}$$

$$= \mathrm{arctg}\,y + \mathrm{Ln}(y^2+2) + C$$

7. $\displaystyle\int \frac{dz}{z^4+z^2} = -\frac{1}{z} - \mathrm{arctg}\,z + C$

Solución :

$$\frac{1}{z^2(z^2+1)} = \frac{A}{z^2} + \frac{B}{z} + \frac{Cz+D}{z^2+1}$$

$$1 = A(z^2+1) + B(z^3+z) + Cz^3 + Dz^2$$

$$1 = (B+C)z^3 + (A+D)z^2 + Bz + A$$

igualando coeficientes de la misma potencia de z, se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} B + C = 0 \\ A + D = 0 \\ A = 1 \\ B = 0 \end{array}\right\} \rightarrow A = 1,\ D = -1,\ B = 0,\ C = 0$$

$$\rightarrow \int \left(\frac{A}{z^2} + \frac{B}{z} + \frac{Cz + D}{z^2 + 1}\right) dz = \int \frac{dz}{z^2} - \int \frac{dz}{z^2 + 1}$$

$$= -\frac{1}{z} - \operatorname{arctg} z + C$$

8. $$\int \frac{(x^3 + 3x)dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) - \frac{1}{x^2 + 1} + C$$

Solución :

$$\frac{x^3 + 3x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{Ax + B}{(x^2 + 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$$

$$x^3 + 3x = Ax + B + (x^2 + 1)(Cx + D)$$

$$x^3 + 3x = Cx^3 + Dx^2 + (A + C)x + B + D$$

igualando coeficientes de la misma potencia de x, se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} C = 1 \\ D = 0 \\ A + C = 3 \\ B + D = 0 \end{array}\right\} \rightarrow A = 2,\quad B = 0\quad C = 1,\quad D = 0$$

$$\int \left(\frac{Ax + B}{(x^2 + 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}\right) dx = \int \frac{2x\,dx}{(x^2 + 1)^2} + \int \frac{x\,dx}{x^2 + 1}$$

$$= -\frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C$$

9. $$\int \frac{(4x^2 + 2x + 8)dx}{x(x^2 + 2)^2} = \ln\frac{x^2}{x^2 + 2} + \frac{x}{2x^2 + 4} + \frac{2}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$$

Solución :

$$\frac{4x^2 + 2x + 8}{x(x^2 + 2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{(x^2 + 2)^2} + \frac{Dx + E}{x^2 + 2}$$

$$= A(x^2 + 2)^2 + Bx^2 + Cx + (Dx + E)(x^2 + 2)x$$

$$4x^2 + 2x + 8 = (A + D)x^4 + Ex^3 + (4A + B + 2D)x^2 +$$

$$+ (C + 2E)x + 4A$$

igualando los coeficientes de las mismas potencias de x, se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} A + D = 0 \\ E = 0 \\ 4A + B + 2D = 4 \\ C + 2E = 2 \\ 4A = 8 \end{array}\right\} \rightarrow A = 2,\ B = 0,\ C = 2,\ D = -2,\ E = 0$$

$$\rightarrow \int \left(\frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{(x^2 + 2)^2} + \frac{Dx + E}{x^2 + 2}\right) dx = 2\int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2} \int \frac{2x\,dx}{x^2 + 2}$$

$$= 2\operatorname{Ln} x + \frac{x}{2x^2 + 4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} - \operatorname{Ln}(x^2 + 2) + C$$

$$= \operatorname{Ln}\frac{x^2}{x^2 + 2} + \frac{x}{2x^2 + 4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

10. $$\int \frac{dx}{x^3 + x^2 + x} = -\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{x^2 + x + 1}{x^2} - \frac{3}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x + 1}{3} + C$$

Solución :

$$\frac{1}{x^3 + x^2 + x} = \frac{1}{x(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}$$

$$1 = Ax^2 + Ax + A + Bx^2 + Cx$$

$$1 = (A + B)x^2 + (A + C)x + A$$

igualando los coeficientes de las mismas potencias de x, se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} A + B = 0 \\ A + C = 0 \\ A = 1 \end{array}\right\} \rightarrow A = 1,\quad B = C = -1$$

$$\int\left(\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}\right)dx = \int\frac{dx}{x} - \int\frac{(x+1)dx}{x^2+x+1}$$

$$= \int\frac{dx}{x} - \int\frac{x\,dx}{x^2+x+1} - \int\frac{dx}{x^2+x+1} =$$

$$= \int\frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \text{Ln}\,x - \frac{1}{2}\,\text{Ln}(x + x + 1) - \frac{\sqrt{3}}{3}\,\text{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= -\frac{1}{2}\,\text{Ln}\,\frac{x^2+x+1}{x^2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\,\text{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

11. $\displaystyle\int\frac{4\,dx}{x^4-1} = \ln\frac{x-1}{x+1} - 2\,\text{arctg}\,x + C$

Solución :

$$\frac{4}{x^4-1} = \frac{4}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{Ax+B}{x^2-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$4 = (Ax+B)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1)$$

$$4 = (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + (A-C)x + B - D$$

igualando los coeficientes de las mismas potencias de x,

$$\left.\begin{array}{l} A + C = 0 \\ B + D = 0 \\ A - C = 0 \\ B - D = 4 \end{array}\right\} \rightarrow A = 0,\quad B = 2,\quad C = 0,\quad D = -2$$

$$\rightarrow \int\left(\frac{Ax+B}{x^2-1} + \frac{Bx+D}{x^2+1}\right)dx = 2\int\frac{dx}{x^2-1} - 2\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \text{Ln}\,\frac{x-1}{x+1} - 2\,\text{arctg}\,x + C$$

12. $\displaystyle\int\frac{(2z^2+3z+2)dz}{(z+2)(z^2+2z+2)} = 2\ln(z+2) - \text{arctg}(z+1) + C$

Solución :

$$\frac{2z^2+3z+2}{(z+2)(z^2+2z+2)} = \frac{A}{z+2} + \frac{Bz+C}{z^2+2z+2}$$

$$2z^2 + 3z + 2 = Az^2 + 2Az + 2A + Bz^2 + Cz + 2Bz + 2C$$

$$= (A+B)z^2 + (2A + C + 2B)z + 2A + 2C$$

igualando los coeficientes de las mismas potencias de x,

$$\left.\begin{array}{r} A + B = 2 \\ 2A + C + 2B = 3 \\ 2A + 2C = 2 \end{array}\right\} \rightarrow A = 2,\quad C = -1,\quad B = 0$$

$$\int\left(\frac{A}{z+2} + \frac{Bz+C}{z^2+2z+2}\right)dz = 2\int\frac{dz}{z+2} - \int\frac{dz}{z^2+2z+2}$$

$$= 2\int\frac{dz}{z+2} - \int\frac{dz}{(z+1)^2+1} = 2\,\text{Ln}(z+2) - \text{arctg}(z+1) + C$$

13. $\displaystyle\int\left(\frac{t+3}{t^2+4t+5}\right)^2 dt = \text{arctg}(t+2) - \frac{1}{t^2+4t+5} + C$

$$\left(\frac{t+3}{t^2+4t+5}\right)^2 = \frac{(t+3)^2}{(t^2+4t+5)^2} = \frac{At+B}{(t^2+4t+5)^2} + \frac{Ct+D}{t^2+4t+5}$$

$$t^2 + 6t + 9 = At + B + Ct^3 + 4Ct^2 + 5Ct + Dt^2 + 4Dt + 5D$$

$$= Ct^3 + (4C+D)t^2 + (A + 5C + 4D)t + B + 5D$$

igualando los coeficientes de la misma potencia de t,

$$\left.\begin{array}{r} C = 0 \\ 4C + D = 1 \\ A + 5C + 4D = 6 \\ B + 5D = 9 \end{array}\right\} A = 2,\quad B = 4,\quad C = 0,\quad D = 1$$

$$\rightarrow \int\frac{At+B}{(t^2+4t+5)^2}\,dt + \int\frac{Ct+D}{t^2+4t+5}\,dt$$

$$= \int\frac{2t+4}{(t^2+4t+5)^2}\,dt + \int\frac{dt}{t^2+4t+5}$$

$$= \int \frac{d(t^2+4t+5)}{(t^2+4t+5)^2} + \int \frac{dt}{(t+2)^2+1} = -$$

$$= -\frac{1}{t^2+4t+5} + \operatorname{arctg}(t+2) + C$$

14. $\displaystyle\int_1^4 \frac{(5x^2+4)}{x^3+4x} = 3\ln 4 = 4.1589$

Solución :

$$\frac{5x^2+4}{x^3+4x} = \frac{5x^2+4}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$$5x^2+4 = Ax^2+4A+Bx^2+Cx$$

$$5x^2+4 = (A+B)x^2+Cx+4A$$

igualando los coeficientes de la misma potencia de x, se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} A+B=5 \\ C=0 \\ 4A=4 \end{array}\right\} \rightarrow A=1,\quad B=4,\quad C=0$$

$$\rightarrow \int_1^4 \left(\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}\right)dx = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{4x\,dx}{x^2+4}$$

$$= \operatorname{Ln}x + 2\operatorname{Ln}(x^2+4)\Big]_1^4 = \operatorname{Ln}x(x^2+4)^2\Big]_1^4$$

$$= \operatorname{Ln}4(20)^2 - \operatorname{Ln}(5)^2 = \operatorname{Ln}4 + \operatorname{Ln}(20)^2 - \operatorname{Ln}(5)^2$$

$$= \operatorname{Ln}4 + \operatorname{Ln}(4)^2 + \operatorname{Ln}(5)^2 - \operatorname{Ln}(5)^2$$

$$= 3\operatorname{Ln}4 = 4.1589$$

15. $\displaystyle\int_0^1 \frac{5x\,dx}{(x+2)(x^2+1)} = \ln\frac{8}{9} + \frac{\pi}{4} = 0.667$

$$\frac{5x}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$5x = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx + 2Bx + 2C$$

$$5x = (A+B)x^2 + (C+2B)x + A + 2C$$

igualando los coificientes de las mismas potencia de x.

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} A+B=0 \\ C+2B=5 \\ A+2C=0 \end{array}\right\} A=-2,\quad B=2,\quad C=1$$

$$\int_0^1 \left(\frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+1}\right)dx = -2\int_0^1 \frac{dx}{x+2} + \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+1}dx$$

$$= -2\int_0^1 \frac{dx}{x+2} + \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx + \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= -2\operatorname{Ln}(x+2) + \operatorname{Ln}(x^2+1) + \operatorname{arctg}x\Big]_0^1$$

$$= \operatorname{Ln}\frac{(x^2+1)}{(x+2)^2} + \operatorname{arctg}x\Big]_0^1$$

$$= \operatorname{Ln}\frac{2}{3^2} - \operatorname{Ln}\frac{1}{(2)^2} + \operatorname{arctg}(1) - \operatorname{arctg}(0)$$

$$= \operatorname{Ln}\frac{2}{(3)^2} + \operatorname{Ln}(4) + \frac{\pi}{4} = \operatorname{Ln}\frac{8}{9} + \frac{\pi}{4} = 0.667$$

16. $\displaystyle\int_0^1 \frac{(2x^2+x+3)dx}{(x+1)(x^2+1)} = \ln 4 + \frac{\pi}{4} = 2.171$

Solución :

$$\frac{2x^2+x+3}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$2x^2+x+3 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1)$$

$$2x^2+x+3 = (A+B)x^2 + (B+C)x + A + C$$

igualando los coeficientes de la misma potencia de x, se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} A+B=2 \\ B+C=1 \\ A+C=3 \end{array}\right\} \rightarrow A=2,\quad B=0,\quad C=1$$

$$\rightarrow \int_0^1 \left(\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}\right)dx = 2\int_0^1 \frac{dx}{x+1} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \left[2\,Ln(x+1) + \operatorname{arctg} x\right]_0^1 = \left[Ln(x+1)^2 + \operatorname{arctg} x\right]_0^1$$

$$= Ln(4) + \operatorname{arctg}(1) - Ln(1) - \operatorname{arctg}(0)$$

$$= Ln(4) + \frac{\pi}{4} = 2.171$$

17. $\displaystyle\int_0^1 \frac{(4x^2+2x)dx}{(x^2+1)(x+1)^2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \ln 2 = 0{,}592$

Solución

$$\frac{4x^2+2x}{(x^2+1)(x+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{x+1}$$

$$4x^2+2x = (Ax+B)(x+1)^2 + C(x^2+1) + D(x^2+1)(x+1)$$

$$4x^2+2x = (A+D)x^3 + (2A+B+C+D)x^2 + (A+2B+D)x + B + D + C$$

igualando los coeficientes de la misma potencia de x, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} A + D = 0 \\ 2A + B + C + D = 4 \\ A + 2B + D = 2 \\ B + D + C = 0 \end{array}\right\} \rightarrow A = 2,\ B = 1,\ C = 1,\ D = -2$$

$$\rightarrow \int_0^1 \left(\frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{x+1}\right)dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+1}dx + \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2} - 2\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$$

$$= \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx + \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} + \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2} - 2\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$$

$$= \left[Ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x - \frac{1}{x+1} - 2\,Ln(x+1)\right]_0^1$$

$$= Ln(2) + \operatorname{arctg}(1) - \frac{1}{2} - 2Ln(2) - Ln(1) - \operatorname{arctg}(0) - 2Ln(1) + 1$$

$$= -Ln(2) + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} = 0.592$$

18. $\displaystyle\int_3^4 \frac{(5t^3-4t)dt}{t^4-16} = \ln\frac{12}{5} + \frac{3}{2}\ln\frac{20}{3} = 1.522$

Solución:

$$\frac{5t^3-4t}{t^4-16} = \frac{5t^3-4t}{(t^2-4)(t^2+4)} = \frac{At+B}{t^2-4} + \frac{Ct+D}{t^2+4}$$

$$5t^3 - 4t = (At+B)(t^2+4) + (Ct+D)(t^2-4)$$

$$5t^3 - 4t = (A+C)t^3 + (B+D)t^2 + (4A-4C)t + 4B - 4D$$

igualando los coeficientes de las mismas potencias de t,

$$\left.\begin{array}{l} A + C = 5 \\ B + D = 0 \\ 4A - 4C = -4 \\ 4B - 4D = 0 \end{array}\right\} \rightarrow A = 2,\ B = 0,\ C = 3,\ D = 0$$

$$\rightarrow \int_3^4 \frac{2t-0}{t^2-4}dt + \int_3^4 \frac{3t-0}{t^2+4} =$$

$$= \int_3^4 \frac{2t}{t^2-4} + 3\int_3^4 \frac{t\,dt}{t^2+4} = \left[Ln(t^2-4) + \frac{3}{2}Ln(t^2+4)\right]_3^4$$

$$= Ln(12) + \frac{3}{2}Ln(20) - Ln(5) - \frac{3}{2}Ln(13) =$$

$$= Ln\left(\frac{12}{5}\right) + \frac{3}{2}Ln\left(\frac{20}{13}\right) = 1.522$$

19. $\displaystyle\int \frac{6x^2 + 3x + 4}{x^3 + 2x}\,dx$

Solución :

$$\frac{6x^2 + 3x + 4}{x^3 + 2x} = \frac{6x^2 + 3x + 4}{x(x^2 + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2}$$

$$= Ax^2 + 2A + Bx^2 + Cx$$

$$6x^2 + 3x + 4 = (A + B)x^2 + Cx + 2A$$

igualando los coeficientes de la misma potencia de x

$$\left.\begin{array}{l} A + B = 6 \\ C = 3 \\ 2A = 4 \end{array}\right. \rightarrow A = 2,\ B = 4,\ C = 3$$

$$\int\left(\frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2}\right)dx = \int\frac{2}{x}\,dx + \int\frac{4x + 3}{x^2 + 2} =$$

$$= 2\int\frac{dx}{x} + 2\int\frac{d(x^2 + 4)}{x^2 + 2} + 3\int\frac{dx}{x^2 + 2}$$

$$= 2\,\mathrm{Ln}x + 2\,\mathrm{Ln}(x^2 + 2) + \frac{3\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

$$= \mathrm{Ln}\left[(x)(x^2 + 2)\right]^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

20. $\displaystyle\int\frac{(3x^3 + 3x + 1)dx}{x^4 + 3x^2}$

Solución

$$\frac{3x^3 + 3x + 1}{x^4 + 3x^2} = \frac{3x^3 + 3x + 1}{x^2(x^2 + 3)} = \frac{Ax + B}{x^2} = \frac{Cx + D}{x^2 + 3}$$

$$= (Ax + B)(x^2 + 3) + (Cx + D)(x^2)$$

$$3x^3 + 3x + 1 = (A + C)x^3 + (B + D)x^2 + 3Ax + 3B$$

igualando los coeficientes de la misma potencia de x,

$$\left.\begin{array}{l} A + C = 3 \\ B + D = 0 \\ 3A = 3 \\ 3B = 1 \end{array}\right\} \rightarrow A = 1,\ B = \frac{1}{3},\ C = 2,\ D = -\frac{1}{3}$$

$$\rightarrow \int\left(\frac{Ax + B}{x^2}\right)dx + \int\frac{Cx + D}{x^2 + 2}\,dx = \int\frac{dx}{x} + \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2} + \int\frac{2x - 1/3}{x^2 + 2}$$

$$= \int\frac{dx}{x} + \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2} + \int\frac{2x\,dx}{x^2 + 2} - \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2 + 2}$$

$$= \mathrm{Ln}x - \frac{1}{3x} + \mathrm{Ln}(x^2 + 2) - \frac{\sqrt{2}}{6}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

21. $\displaystyle\int\frac{5x^2 + 12x + 9}{x^3 + 3x^2 + 3x}\,dx$

Solución :

$$\frac{5x^2 + 12x + 9}{x^3 + 3x^2 + 3x} = \frac{5x^2 + 12x + 9}{x(x^2 + 3x + 3)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 3x + 3}$$

$$5x^2 + 12x + 9 = Ax^2 + 3Ax + 3A + Bx^2 + Cx$$

$$5x^2 + 12x + 9 = (A + B)x^2 + (3A + C)x + 3A$$

igualando los coeficientes de las mismas potencias de x,

$$\left.\begin{array}{l} A + B = 5 \\ 3A + C = 12 \\ 3A = 9 \end{array}\right\} \rightarrow A = 3,\ C = 3,\ B = 2$$

$$\rightarrow \int\left(\frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 3x + 3}\right)dx = 3\int\frac{dx}{x} + \int\frac{(2x + 3)dx}{x^2 + 3x + 3}$$

$$= 3\int\frac{dx}{x} + \int\frac{d(x^2 + 3x + 3)}{x^2 + 3x + 3} = 3\,\mathrm{Ln}(x) + \mathrm{Ln}(x^2 + 3x + 3) + C$$

$$= \mathrm{Ln}(x^3)(x^2 + 3x + 3) + C$$

22. $\displaystyle\int\frac{(4x^3 + 3x^2 + 18x + 12)dx}{(x^2 + 4)^2}$

Solución :

$$\frac{4x^3 + 3x^2 + 18x + 12}{(x^2 + 4)^2} = \frac{Ax + B}{(x^2 + 4)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}$$

$$4x^3 + 3x^2 + 18x + 12 = Ax + B + (Cx + D)(x^2 + 4)$$

$$4x^3 + 3x^2 + 18x + 12 = Cx^3 + Dx^2 + (A + 4C)x + B + 4D$$

igualando los coeficientes de la misma potencia de x,

$$\begin{aligned} C &= 4 \\ D &= 3 \\ A + 4C &= 18 \\ B + 4D &= 12 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad A = 2, \quad B = 0, \quad C = 4, \quad D = 3$$

$$\rightarrow \int \left(\frac{Ax + B}{(x^2 + 4)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}\right)dx = \int \frac{2x\,dx}{(x^2 + 4)^2} + \int \frac{4x + 3}{x^2 + 4}$$

$$= \int \frac{d(x^2 + 4)}{(x^2 + 4)^2} + 2\int \frac{d(x^2 + 4)}{x^2 + 4} + 3\int \frac{dx}{x^2 + 4}$$

$$= -\frac{1}{x^2 + 4} + 2\,Ln(x^2 + 4) + \frac{3}{2}\,arctg\,\frac{x}{2} + C$$

23. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{8y\,dy}{(2y + 1)(4y^2 + 1)}$

Solución:

$$\frac{8y}{(2y + 1)(4y^2 + 1)} = \frac{A}{2y + 1} + \frac{By + C}{4y^2 + 1} =$$

$$= A(4y^2 + 1) + (By + C)(2y + 1)$$

$$8y = (4A + 2B)y^2 + (2C + B)y + A + C$$

igualando los coeficientes de la misma potencia de y, se tiene:

$$\begin{aligned} 4A + 2B &= 0, \\ 2C + B &= 8 \\ A + C &= 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad A = -2, \quad C = 2, \quad B = 4$$

$$\rightarrow \int_0^{1/2} \left(\frac{A}{2y + 1} + \frac{By + C}{4y^2 + 1}\right)dy = -\int_0^{1/2} \frac{2\,dy}{2y + 1} + \int_0^{1/2} \frac{4y + 2}{4y^2 + 1}\,dy =$$

$$= -\int_0^{1/2} \frac{d(2y - 1)}{2y + 1} + 4\int_0^{1/2} \frac{y\,dy}{4y^2 + 1} + 2\int_0^{1/2} \frac{dy}{4y^2 + 1}$$

$$= -\int_0^{1/2} \frac{d(2y + 1)}{2y + 1} + \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{d(4y^2 + 1)}{4y^2 + 1} + \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{dy}{y^2 + (\frac{1}{2})^2}$$

$$= -Ln(2y + 1) + \frac{1}{2}\,Ln(4y^2 + 1) + arctg\,2y\Big]_0^{1/2}$$

$$= Ln\,\frac{(4y^2 + 1)^{1/2}}{2y + 1} + arctg\,2y\Big]_0^{1/2} = \frac{1}{2}\,Ln2 + arctg(1) - arctg(0)$$

$$= \frac{1}{2}\,Ln2 + \frac{\pi}{4}$$

24. $\displaystyle\int_0^1 \frac{(2x^3 - 4)dx}{(x^2 + 1)(x + 1)^2}$

Solución :

$$\frac{2x^3 - 4}{(x^2 + 1)(x + 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2} + \frac{D}{x + 1}$$

$$= (Ax + B)(x + 1)^2 + C(x^2 + 1) + D(x + 1)(x^2 + 1)$$

$$2x^3 - 4 = (A + D)x^3 + (2A + B + C + D)x^2 +$$

$$+ (A + D + 2B)x + B + C + D$$

igualando los coeficientes de la misma potencia de x, se tiene:

$$\left.\begin{aligned} A + D &= 2 \\ 2A + B + C + D &= 0 \\ A + D + 2B &= 0 \\ B + C + D &= -4 \end{aligned}\right\} \rightarrow A = 2, \quad B = -1, \quad C = -3, \quad D = 0$$

$$\rightarrow \int_0^1 \left(\frac{Ax+B}{x^2 + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2} + \frac{D}{x + 1}\right)dx = \int_0^1 \frac{(2x-1)\,dx}{x^2 + 1} - 3\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{2x\,dx}{x^2+1} - \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} - 3\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2} =$$

$$= \operatorname{Ln}(x^2+1) - \operatorname{arctg} x + \frac{3}{x+1}\Big]_0^1$$

$$= \operatorname{Ln}(2) - \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} - 3 = \operatorname{Ln}2 - \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}$$

25. $\displaystyle\int_0^3 \frac{(2x^3+18x^2)dx}{(x+3)(x^2+9)} = \int_0^3 \left(2 - \frac{6x^2+18x+46}{(x+3)(x^2+9)}\right)dx$

Solución :

$$= 2\int_0^3 dx - \int_0^3 \frac{6x^2+18x+46}{(x+3)(x^2+9)}$$

$$\rightarrow \frac{6x^2+18x+36}{(x+3)(x^2+9)} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2+9} = A(x^2+9) + (Bx+C)(x+3)$$

$$6x^2 + 18x + 36 = (A+B)x^2 + (3B+C)x + 9A + 3C$$

igualando los coeficientes de la misma potencia de x, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} A + B = 6 \\ 3B + C = 18 \\ 9A + 3C = 36 \end{array}\right\} \quad A = 2,\ B = 4,\ C = 6$$

$$\rightarrow 2\int_0^3 dx - \int_0^3 \left(\frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2+9}\right)dx = 2\int_0^3 dx - 2\int_0^3 \frac{dx}{x+3}$$

$$- 4\int_0^3 \frac{x\,dx}{x^2+9} - 6\int_0^3 \frac{dx}{x^2+9}$$

$$= 2\int_0^3 dx - 2\int_0^3 \frac{dx}{x+3} - 2\int_0^3 \frac{d(x^2+9)}{x^2+9} - 6\int_0^3 \frac{dx}{x^2+9}$$

$$= 2x - 2\operatorname{Ln}(x+3) - 2\operatorname{Ln}(x^2+9) - 2\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\Big]_0^3$$

$$= 6 - 2\ln 2 - \frac{\pi}{2}$$

INTEGRACION POR SUSTITUCION DE UNA NUEVA VARIABLE

DIFERENCIALES QUE CONTIENEN SOLAMENTE POTENCIAS FRACCIONARIAS DE x:

I) Una expresión que contiene solamente potencias fraccionarias de x puede transformarse enforma racional mediante la sustitución de:

$$x = z^n$$

siendo n el menor denomiandor común de las exponentes fraccionarias de x.

II) Una Expresión que contiene solamente potencias fraccionarias de (a + bx) puede transformarse en forma racional mediante la sustitución:

$$a + bx = z^n$$

Siendo n el menor denominador común de los exponentes fraccionarias de la expresión (a + bx).

PROBLEMAS:

VERIFICAR LAS SIGUIENTES INTEGRALES

1.- $\displaystyle\int \frac{(5x+9)dx}{(x-9)x^{3/2}} = \frac{2}{x} + 2\ln\frac{x-3}{x+3} + C$

Solución :

Haciendo $x = z^2 \rightarrow dx = 2z\,dz$, reemplazamos en la integral

$$\int \frac{(5x^2+9)2z\,dz}{z^5 - 9z^3} = \int \frac{(10z^2+18)dz}{z^4 - 9z^2}$$

$$\rightarrow \frac{10z^2+18}{z^4 - 9z^2} = \frac{10z^2+18}{z^2(z^2-9)} = \frac{Az+B}{x^2} + \frac{Cz+D}{z^2-9}$$

$$10z^2 + 18 = (Az+B)(z^2-9) + (Cz+D)z^2$$

$$= (A + C)z^3 + (B + D)z^2 - 9Az - 9B$$

Igualando los coeficientes de la misma potencia de z, se tiene:

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ B + D &= 10 \quad \to \quad A = 0, \quad B = -2; \quad C = 0, \quad D = 12 \\ -9A &= 0 \\ -9B &= 18 \end{aligned}$$

$$\to \int \left(\frac{Az + B}{z^2} + \frac{Cz + D}{z^2 - 9}\right)dz = -2\int \frac{dz}{z^2} + 12\int \frac{dz}{z^2 - 9}$$

$$= \frac{2}{z} + \frac{12}{6}\operatorname{Ln}\frac{z - 3}{z + 3} + C$$

Pero, $z^2 = x \to$ se tiene: $z = x^{1/2} = \sqrt{x}$

$$= \frac{2}{\sqrt{x}} + 2\operatorname{Ln}\frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 3} + C$$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x - x^{4/3}} = 3\operatorname{Ln}\frac{x^{1/3}}{1 - x^{1/3}} + C$

Solución :

Haciendo: $x = z^3 \to dx = 3z^2dz$; reemplazamos en la integral

$$\int \frac{3z^2dz}{z^3 - z^4} = \int \frac{3dz}{z - z^2}$$

$$\frac{3}{z - z^2} = \frac{3}{z(1 - z)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{1 - z} = A - Az + Bz$$

$$3 = A + (B - A)z$$

Igualando los coeficientes de la misma potencia de z, se tiene:

$$\left.\begin{aligned} A &= 3 \\ B - A &= 0 \end{aligned}\right\} \to B = 3, \quad A = 3$$

$$\to \int \left(\frac{A}{z} + \frac{B}{1 - z}\right)dz = 3\int \frac{dz}{z} - 3\int \frac{d(1-z)}{(1 - z)} =$$

$$= 3\operatorname{Ln}(z) - 3\operatorname{Ln}(1 - z) + C$$

$$= 3\operatorname{Ln}\frac{z}{1 - z} + C$$

pero: $z^3 = x \to z = x^{1/3}$

$$\to = 3\operatorname{Ln}\frac{x^{1/3}}{1 - x^{1/3}} + C$$

3.- $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{(4x + 1)^{5/2}} = \frac{6x^2 + 6x + 1}{12(4x + 1)^{3/2}} + C$

Solución

Haciendo la sustitución $4x + 1 = z^2 \to x = \frac{1}{4}(z^2 - 1) \to$

$dx = \frac{z}{2}dz$ en la integral.

$$\int \frac{\frac{1}{16}(z^2 - 1)^2 \frac{z}{2}dz}{z^5} = \frac{1}{32}\int \frac{(z^2 - 1)^2}{z^4}dz$$

$$= \frac{1}{32}\int dz - \frac{1}{16}\int \frac{dz}{z^2} + \frac{1}{32}\int \frac{dz}{z^4}$$

$$= \frac{z}{32} + \frac{1}{16z} - \frac{1}{96z^3} + C = \frac{3z^4 + 6z^2 - 1}{96z^3} + C$$

pero: $4x + 1 = z^2$

$$\to \frac{3(4x + 1)^2 + 6(4x + 1) - 1}{96(4x + 1)^{3/2}} + C = \frac{48x^2 + 24x + 3 + 24x + 6 - 1}{96(4x+1)^{3/2}} + C$$

$$= \frac{6x^2 + 6x + 1}{12(4x + 1)^{3/2}} + C$$

4.- $\displaystyle\int \frac{dx}{x^{5/8} - x^{1/8}} = \frac{8x^{3/8}}{3} + 2\operatorname{Ln}\frac{x^{1/8} - 1}{x^{1/8} + 1} + 4\operatorname{arctg} x^{1/8} + C$

Solución :

Haciendo la sustitución $x = z^8$, $dx = 8z^7dz$, en la integral

se tiene: $\displaystyle\int \frac{8z^7 dz}{z^5 - z} = \int \frac{8z^6 dz}{z^4-1}$

$$\int \frac{8z^6 dz}{z^4-1} = \int \left(8z^2 + \frac{8z^2}{z^4-1}\right)dz = 8\int z^2 dz + 8\int \frac{8z^2 dz}{z^4-1}$$

$$\rightarrow \frac{8z^2}{z^4-1} = \frac{8z^2}{(z^2-1)(z^2+1)} = \frac{Az+B}{z^2-1} + \frac{Cz+D}{z^2+1} =$$

$$8x^2 = Az^3 + Bz^2 + Az + B + Cz^3 + Dz^2 - Cz - D$$

$$8z^2 = (A+C)z^3 + (B+D)z^2 + (A-C)z + B - D$$

igualando los coeficientes de la misma potencia de z, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} A + C = 0 \\ B + D = 8 \\ A - C = 0 \\ B - D = 0 \end{array}\right\} \rightarrow A = 0, \quad B = 4, \quad C = 0, \quad D = 4$$

$$\rightarrow 8\int z^2 dz + \int \left(\frac{Az+B}{z^2-1} + \frac{Cz+D}{z^2+1}\right)dz$$

$$= 8\int z^2 dz + 4\int \frac{dz}{z^2-1} + 4\int \frac{dz}{z^2+1}$$

$$= \frac{8z^3}{3} + 4\operatorname{arctg} z + 2\operatorname{Ln}\frac{z-1}{z+1} + C$$

Como $x = z^8 \rightarrow z = x^{1/8} \rightarrow$

$$= \frac{8x^{3/8}}{3} + 4\operatorname{arctg} x^{1/8} + 2\operatorname{Ln}\frac{x^{1/8}-1}{x^{1/8}+1} + C$$

5.- $\displaystyle\int y\sqrt[3]{a+y}\,dy = \frac{3}{28}(4y - 3a)(a+y)^{4/3} + C$

Solución :

Haciendo la sustitución $z^3 = (a+y) \rightarrow y = z^3 - a \rightarrow dy = 3z^2 dz$, en la

integral se tiene:

$$\int (z^3 - a)(z)(3z^2)dz = \int (3z^6 - 3az^3)dz = \frac{3z^7}{7} - \frac{3az^4}{4}$$

$$= \frac{3z^4}{28}(4z^3 - 7a) = \frac{3}{28}(a+y)^{4/3}(4y - 3a) + C$$

6.- $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x+1}+1)dx}{\sqrt{x+1}-1} = x + 1 + 4\sqrt{x+1} + 4\operatorname{Ln}(\sqrt{x+1} - 1) + C$

Solución :

Haciendo la sustitución $z^2 = (x+1)$, $x = z^2 - 1 \rightarrow dx = 2z dz$, en la integral se tiene:

$$\int \frac{(z+1)2z dz}{z-1} = \int \frac{(2z^2+2)}{z-1}dz = \int \left(2z + 4 + \frac{4}{z-1}\right)dz$$

$$= 2\int z dz + 4\int dz + 4\int \frac{dz}{z-1} = z^2 + 4z + 4\operatorname{Ln}(z-1) + C$$

pero $z^2 = x + 1$

$$\rightarrow = x + 1 + 4\sqrt{x+1} + 4\operatorname{Ln}(\sqrt{x+1} - 1) + C$$

7.- $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + x + a} = \frac{3}{2}(x+a)^{2/3} - 3(x+a)^{1/3} + 3\operatorname{Ln}(1 + \sqrt[3]{x+a}) + C$

Solución :

Haciendo $t^3 = x + a \rightarrow x = t^3 - a \rightarrow dx = 3t^2 dt$, reemplazamos en la integral.

$$\int \frac{3t^2 dt}{1+t} = \int \left(3t - 3 + \frac{3}{t+1}\right)dt = 3\int t dt - 3\int dt + 3\int \frac{dt}{t+1}$$

$$= \frac{3}{2}t^2 - 3t + 3\operatorname{Ln}(t+1) + C$$

Pero como $t^3 = x + a \rightarrow t = \sqrt[3]{x+a}$

$$= \frac{3}{2}(x+a)^{2/3} - 3(x+a)^{1/3} + 3\operatorname{Ln}(1 + \sqrt[3]{x+a}) + C$$

8.- $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}} = 2\operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{2}$

Solución :
Haciendo $t^2 = x + 1 \to x = t^2 - 1 \to dx = 2tdt$, y reemplazamos en la integral:

$$\int_0^3 \frac{2tdt}{(t^2+1)t} = 2\int_0^3 \frac{dt}{t^2+1} = 2\text{arctg}t\Big]_0^3 = 2\text{arctg}\sqrt{x+1}\Big]_0^3$$

$$= 2\ \text{arctg}\ 2 - \frac{\pi}{2}$$

9.- $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 4 - 2\text{Ln}3$

Solución
Haciendo la sustitución $t^2 = x$, $dx = 2tdt$, en la integral se tiene:

$$\int_0^4 \frac{2tdt}{1+t} = \int_0^4 (2 - \frac{2}{t+1})dt = 2\int_0^4 dt - 2\int_0^4 \frac{dt}{t+1}$$

$$= 2t - 2\text{Ln}(t+1)\Big]_0^4$$

Pero: $t^2 = x \to t = x^{1/2}$

$$\to 2\sqrt{x} - 2\text{Ln}(\sqrt{x}+1)\Big]_0^4 = 4 - 2\ \text{Ln}3$$

10. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{2t}\,(9+\sqrt[3]{2t})} = 3 - 9\ \text{arctg}\ \frac{1}{3}$

Solución :
haciendo $x^6 = 2t \to dt = 3x^5dx$ y sustituyendo en la integral:

$$\int_0^{1/2} \frac{3x^5dx}{x^3(9+x^2)} = \int_0^{1/2} \frac{3x^2dx}{9+x^2} = \int_0^{1/2} (3 - \frac{27}{x^2+9})dx$$

$$= 3\int_0^{1/2} dx - 27\int \frac{dx}{x^2+9} = 3x - 9\text{arctg}\ \frac{x}{3}\Big]_0^{1/2}$$

Pero $x^6 = 2t \to x = \sqrt[6]{2t}$

$$\therefore = 3\sqrt[6]{2t} - 9\ \text{arctg}\ \frac{\sqrt[6]{2t}}{3}\Big]_0^{1/2} = 3 - 9\ \text{arctg}\ \frac{1}{3}$$

11. $\displaystyle\int_1^{64} \frac{dt}{2\sqrt{t}+\sqrt[3]{t}} = 5.31$

Solución :
Haciendo la sustitución $x^6 = t \to dt = 6x^5dx$, en la integral se tiene:

$$\int_1^{64} \frac{6x^5dx}{2x^3+x^2} = \int_1^{64} \frac{6x^3dx}{2x+1} = \int_1^{64} (3x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} - \frac{3}{4(2x+1)})dx$$

$$= \int_1^{64} 3x^2dx = \frac{3}{2}\int_1^{64} xdx + \frac{3}{4}\int_1^{64} dx - \frac{3}{4}\int_1^{64} \frac{dx}{2x+1}$$

$$= x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3x}{4} - \frac{3}{8}\text{Ln}(2x+1)\Big]_1^{64}$$

pero como $x^6 = t \to x = \sqrt[6]{t}$

$$= t^{1/2} - \frac{3}{4}t^{1/3} + \frac{3\sqrt[6]{t}}{4} - \frac{3}{8}\text{Ln}(2\sqrt[6]{t}+1)\Big]_1^{64}$$

$$= 8 - 3 + \frac{3}{2} = \frac{3}{8}\text{Ln}(4+1) - 1 + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} + \frac{3}{8}\ln(2+1)$$
$$= 7 - \frac{3}{2} + \frac{3}{8}\ln\frac{3}{5} = 5.31$$

12. $\displaystyle\int_3^{29} \frac{(x-2)^{2/3}dx}{(x-2)^{2/3}+3} = 8 + \frac{3}{2}\pi\sqrt{3}$

Solución :
Haciendo la sustitución $t^3 = x - 2 \to x = t^3 + 2$,
$dx = 3t^2dt$; en la integral

$$\int_3^{29} \frac{t^2(3t^2dt)}{t^2+3} = \int_3^{29} \frac{3t^4dt}{t^2+3} = \int_3^{29} (3t^2 - 9 + \frac{27}{t^2+3})dt$$

$$= 3\int_3^{29} t^2dt - 9\int_3^{29} dt + 27\int_3^{29} \frac{dt}{t^2+3}$$

$$= t^3 - 9t + 9\sqrt{3}\ \text{arctg}\ \frac{t}{\sqrt{3}}\Big]_3^{29}$$

pero $t^3 = x - 2 \to t = (x-2)^{1/3}$

$$\to\ = x - 2 - 9(x-2)^{1/3} + 9\sqrt{3}\ \text{arctg}\ \frac{\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt{3}}\Big]_3^{29}$$

$$= 27 - 27 + 9\sqrt{3}\ \text{arctg}\ \frac{3}{\sqrt{3}} - 1 + 9 - 3\sqrt{3}\ \text{arctg}\ \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= 8 + 9\sqrt{3}\,\frac{\pi}{3} - 2\sqrt{3}\,\frac{\pi}{6} = 8 + \frac{3\pi}{2}\sqrt{3}$$

Calcular cada una de las integrales siguientes :

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{x + 2\sqrt{x} + 5}$

Solución

Haciendo $x = t^2$, $dx = 2tdt$, y reemplazando en la integral

$$\int \frac{2tdt}{t^2 + 2t + 5} = \int \frac{(2t + 2 - 2)dt}{t^2 + 2t + 5} = \int \frac{(2t+2)dt}{t^2+2t+5} - 2\int \frac{dt}{t^2 + 2t + 5}$$

$$= \int \frac{d(t^2+2t+5)}{t^2+2t+5} - 2\int \frac{dt}{t^2+2t+1+4} = \int \frac{d(t^2+2t+5)}{t^2+2t+5} - 2\int \frac{dt}{(t+1)^2+4}$$

$$= \text{Ln}(t^2 + 2t + 5) - \text{arctg}\ \frac{t+1}{2} + C$$

$$= \text{Ln}(x + 2\sqrt{x} + 5) - \text{arctg}\ \frac{\sqrt{x}+1}{2} + C$$

14. $\displaystyle\int \frac{(x+2)dx}{x\sqrt{x-3}}$

Solución :

Haciendo la sustitución $x - 3 = z^2$, $x = z^2 + 3$ →

→ $dx = 2zdz$, en la integral

$$\int \frac{(z^2 + 5)2zdz}{(z^2 + 3)z} = 2\int \frac{(z^2 + 5)dz}{z^2 + 3} = 2\int \left(1 + \frac{2}{z^2 + 3}\right)dz$$

$$= 2\int dz + 4\int \frac{dz}{z^2 + 3} = 2z + \frac{4}{\sqrt{3}}\ \text{arctg}\ \frac{z}{\sqrt{3}} + C$$

Pero $z^2 = x - 3$ → $z = (x - 3)^{1/2}$

$$\rightarrow\ = 2(x - 3)^{1/2} + \frac{4\sqrt{3}}{3}\ \text{arctg}\ \frac{(x-3)^{1/2}}{\sqrt{3}} + C$$

15. $\displaystyle\int \frac{dt}{(t + 1)^{1/4} - (t + 1)^{5/4}}$

Solución :

Haciendo la sustitución $t + 1 = x^4$, $t = x^4 - 1 \rightarrow dt = 4x^3dx$ en la integral se tiene:

$$\int \frac{4x^3dx}{x - x^5} = \int \frac{4x^2dx}{1 - x^4}$$

$$\frac{4x^2}{1 - x^4} = \frac{4x^2}{(1 + x^2)(1 - x^2)} = \frac{Ax + B}{1 + x^2} + \frac{Cx + D}{1 - x^2}$$

$$4x^2 = (Ax + B)(1 - x^2) + (Cx + D)(1 + x^2)$$

$$4x^2 = Ax + B - Ax^3 - Bx^2 + Cx + D + Cx^3 + Dx^2$$

$$4x^2 = -(A - C)x^3 + (D - B)x^2 + (A + C)x + B + D$$

igualando los coeficientes de la misma potencia de x, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} A - C = 0 \\ D - B = 4 \\ A + C = 0 \\ B + D = 0 \end{array}\right\} \rightarrow\ A = C = 0,\quad D = 2,\quad B = -2$$

$$\rightarrow \int \left(\frac{Ax + B}{1 + x^2} + \frac{Cx + D}{1 - x^2}\right)dx = -2\int \frac{dx}{1 + x^2} + 2\int \frac{dx}{1 - x^2}$$

$$= -2\ \text{arctg}\ x + \text{Ln}\ \frac{1 + x}{1 - x} + C$$

Pero: $t + 1 = x^4 \rightarrow x = (t + 1)^{1/4}$

$$\rightarrow\ = -2\ \text{arctg}(t + 1)^{1/4} + \text{Ln}\ \frac{1 + (t + 1)^{1/4}}{1 - (t + 1)^{1/4}} + C$$

16. $\displaystyle\int \frac{(x + 3)dx}{(x + 5)\sqrt{x + 4}}$

Solución :

Haciendo la sustitución $x + 4 = t^2$, $x = t^2 - 4 \rightarrow dx = 2tdt$, en la integral:

$$= \int \frac{(t^2 - 1)2tdt}{(t^2 + 1)t} = 2\int \frac{(t^2 - 1)dt}{t^2 + 1} = 2\int (1 - \frac{2}{t^2 + 1})dt$$

$$= 2\int dt - 4\int \frac{dt}{t^2 + 1}$$

$$= 2t - 4arctgt + C$$

Pero $x + 4 = t^2 \rightarrow t = (x + 4)^{1/2}$

$$\rightarrow = 2(x + 4)^{1/2} - 4\ arctg(x + 4)^{1/2} + C$$

17. $\int \frac{(2 - \sqrt{2x + 3})dx}{1 - 2x}$

Solución :

Haciendo la sustitución $2x + 3 = t^2$, $x = \frac{1}{2}(t^2 - 3) \rightarrow$

$\rightarrow dx = tdt$, en la integral se tiene:

$$\int \frac{(2 - t)tdt}{4 - t^2} = \int \frac{2t - t^2}{4 - t^2}dt = \int \frac{t^2 - 2t}{t^2 - 4}dt =$$

$$= \int (1 - \frac{2t - 4}{t^2 - 4})dt$$

$$\int dt - \int 2\frac{(t - 2)}{(t - 2)(t + 2)}dt = \int dt - 2\int \frac{dt}{t + 2}$$

$$= t - 2Ln(t + 2) + C$$

pero $2x + 3 = t^2 \rightarrow t = (2x + 3)^{1/2}$

$$\rightarrow = (2x + 3)^{1/2} - 2Ln\left[(2x + 3)^{1/2} + 2\right] + C$$

DIFERENCIALES BINOMIAS:

La diferencial de la forma:

(*) $x^m(a + bx^n)^P dx$, donde: a,b constante cualquiera y los exponentes m, n, p números racionales se llama diferencial binomia toda diferencial binomia puede reducirse a la forma:

$x^m(a + bx^n)^{r/s}dx$, siendo $m,n,r,s, \in \mathbb{Z}$, $n > 0$

Para la integración de las diferenciales binomias (*) se presentan los siguientes casos:

CASO I: Cuando $\frac{m + 1}{n}$ = Un número entero o cero. En este caso se efectúa la sustitución: $a + bx^n = z^s$

Caso II: Cuando $\frac{m + 1}{n} + \frac{r}{s}$ = Número entero ó cero en este caso se efectúa la sustitución.

$$a + bx^n = z^s x^n$$

PROBLEMAS:

Verificar las siguientes integraciones:

1.- $\int x^5\sqrt{1 + x^3}\,dx = \frac{2(3x^3 - 2)(1 + x^3)^{3/2}}{45} + C$

Solución.

$$\int x^5(1 + x^3)^{1/2}dx$$

$\rightarrow m = 5,\ n = 3,\ r = 1,\ s = 2$, verificando $\frac{n + 1}{n} = \frac{5 + 1}{3}$

$= 2$, nos encontramos en el caso I.

$\therefore$ Hacemos la sustitución

$$1 + x^3 = z^2,\ x^3 = z^2 - 1 \rightarrow x = (z^2 - 1)^{1/3}$$

$\rightarrow dx = \frac{2zdz}{3(z^2 - 1)^{2/3}}$, en la integral se tiene:

$$\int (z^2-1)^{5/3}(z)\left(\frac{2}{3}\frac{zdz}{(z^2-1)^{2/3}}\right) = \frac{2}{3}\int (z^2-1)z^2dz =$$

$$= \frac{2}{3}\int z^4dz - \frac{2}{3}\int z^2dz$$

$$= \frac{2}{15}z^5 - \frac{2}{9}z^3 + C = \frac{2}{45}(3z^5 - 5z^3) + C$$

Pero: $z^2 = 1 + x^3 \to z = (1+x^3)^{1/2}$

$$= \frac{2}{45}(3(1+x^3)^{5/2} - 5(1+x^3)^{3/2}) =$$

$$= \frac{2}{45}(1+x^3)^{3/2}(3x^2 - 2)$$

2.- $\displaystyle\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{2(x^3-2)\sqrt{1+x^3}}{9} + C$

Solución:

$\int x^5(1+x^3)^{-1/2}dx$, $m = 5$, $n = 3$, $r = -1$, $s = 2$

Verificando $\frac{m+1}{n} = \frac{5+1}{3} = 2$, nos hallamos en el caso I

$\to$ Efectuamos la sustitución $1 + x^3 = z^2$, $x = (z^2-1)^{1/3}$,

$dx = \frac{2}{3}\int \frac{zdz}{(z^2-1)^{2/3}}$ en la integral se tiene:

$$\int (z^2-1)^{5/3}(z^{-1})\left(\frac{2}{3}\frac{zdz}{(z^2-1)^{2/3}}\right) = \frac{2}{3}\int (z^2-1)dz =$$

$$= \frac{2}{3}\int z^2dz - \frac{2}{3}\int dz = \frac{2}{9}z^3 - \frac{2}{3}z + C$$

Pero: $z^2 = 1 + x^3 \to z = (1+x^3)^{1/2}$

$$\to = \frac{2}{9}(1+x^3)^{3/2} - \frac{2}{3}(1+x^3)^{1/2} + C = \frac{2}{9}(1+x^3)^{1/2}(3x^3-2) + C$$

3.- $\displaystyle\int x^5(8+x^3)^{3/2}dx = \frac{2(5x^3-16)(8+x^3)^{5/2}}{105} + C$

Solución.

$m = 5$, $n = 3$, $r = 3$, $s = 2$

Verificando $\frac{m+1}{n} = \frac{5+1}{3} = 2$ nos hallamos en el caso I,

entonces efectuamos la siguiente sustitución:

$$8 + x^3 = z^2, \quad x = (z^2-8)^{1/3}$$

$dx = \frac{2}{3}\left(\frac{zdz}{(z^2-8)^{2/3}}\right)$ en la integral

$$\int (z^2-8)^{5/3}(z^3)\left(\frac{2}{3}\frac{zdz}{(z^2-8)^{2/3}}\right) = \frac{2}{3}\int (z^2-8)z^4dz = \frac{2}{3}\int z^6dz - \frac{16}{3}\int z^4dz$$

$$= \frac{2z^7}{21} - \frac{16}{15}z^5 + C = \frac{2}{105}z^5(5z^2 - 56) + C$$

Pero $z^2 = 8 + x^3 \to z = (8+x^3)^{1/2}$

$$\to = \frac{2}{105}(8+x^3)^{5/2}(5x^3 - 16) + C$$

4.- $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(1+x^3)^{2/3}} = -\frac{(1+x^3)^{1/3}}{x} + C$

Solución.

$\int x^{-2}(1+x^3)^{-2/3}dx$ de donde

$m = -2$, $n = 3$, $r = -2$, $s = 3$

Verificando $\frac{n+1}{n} + \frac{r}{s} = \frac{-2+1}{3} - \frac{2}{3} = -1$, nos hallamos en

el caso II entonces efectuamos la sustitución:

$$1 + x^3 = z^3x^3 \to x^3 = \frac{1}{z^3-1}, \quad x = \frac{1}{(z^3-1)^{1/3}} \to$$

$$dx = -\frac{z^2dz}{(z^3-1)^{4/3}}$$

$$\to \int \frac{-\dfrac{z^2dz}{(z^3-1)^{4/3}}}{\left(\dfrac{1}{z^3-1}\right)^{2/3}\left(\dfrac{z^2}{(z^3-1)^{2/3}}\right)} = -\int \frac{\dfrac{z^2dz}{(z^3-1)^{4/3}}}{z^2(z^3-1)^{-4/3}}$$

$$= -\int dz = -z + C$$

Pero: $z^3x^3 = 1 + x^3 \to z = \left(\frac{x^3+1}{x^3}\right)^{1/3} = \frac{(x^3+1)^{1/3}}{x}$

$$\to \; = -\frac{(1+x^3)^{1/3}}{x} + C$$

5.- $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3(1+x^3)^{1/3}} = -\frac{(1+x^3)^{2/3}}{2x^2} + C$

Solución.

Verificando $\frac{m+1}{n} + \frac{r}{s} = \frac{-3+1}{3} - \frac{1}{3} = -1$, nos hallamos en el caso II, $\to$ efectuamos la siguiente sustitución:

$$z^3x^3 = 1 + x^3 \to x = \left(\frac{1}{z^3-1}\right)^{1/3} \to dx = -\frac{3z^2dz}{3(z^3-1)^{4/3}}$$

$$= \int \frac{-\dfrac{z^2dz}{(z^3-1)^{4/3}}}{\left(\dfrac{1}{z^3-1}\right)\left(\dfrac{z}{(z^3-1)^{1/3}}\right)} = -\int \frac{z^2(z^3-1)^{4/3}dz}{z(z^3-1)^{4/3}} = -$$

$$= -\int z\,dz = -\frac{z^2}{2} + C$$

pero: $z^3x^3 = 1 + x^3 \to z = \frac{(1+x^3)^{1/3}}{x}$

$$\to -\frac{z^2}{2} + C = -\frac{(1+x^3)^{1/3}}{2x} + C$$

6.- $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(1+x^4)^{3/4}} = -\frac{(1+x^4)^{1/4}}{x} + C$

Solución.

Verificando: $\frac{m+1}{n} - \frac{r}{s} = \frac{-2+1}{4} - \frac{3}{4} = -1$, nos hallamos en el caso II, $\to$ efectuamos la siguiente sustitución:

$$z^4x^4 = 1 + x^4 \to x = \left(\frac{1}{z^4-1}\right)^{1/4} \to dx = -\frac{z^3dz}{(z^4-1)^{5/4}}$$

$$\to \int \frac{-\dfrac{z^3dz}{(z^4-1)^{5/4}}}{\left(\dfrac{1}{z^4-1}\right)^{1/2}\left(\dfrac{z^3}{(z^4-1)^{3/4}}\right)} = -\int \frac{\dfrac{z^3dz}{(z^4-1)^{5/4}}}{\dfrac{z^3}{(z^4-1)^{5/4}}} = -\int dz = -z + C$$

pero $z^4x^4 = 1 + x^4 \to z = \frac{(1+x^4)^{1/4}}{x}$

$$\therefore -z + C = -\frac{(1+x^4)^{1/4}}{x} + C$$

7.- $\displaystyle\int \frac{dx}{x^n(1+x^n)^{1/n}} = \frac{(1+x^n)^{n-1/n}}{(n-1)x^{n-1}} + C$

Solución.

Verificando: $\frac{m+1}{n} + \frac{r}{s} = \frac{-n+1}{n} - \frac{1}{n} = -1$

nos hallamos en el caso II $\to$ hacemos la siguiente sustitución.

$$x^nz^n = (1+x^n)^{1/n} \to x = \left(\frac{1}{z^n-1}\right)^{1/n}$$

$$\to dx = -\frac{z^{n-1}dz}{(z^n-1)^{n+1/n}}$$

$$\to \int \frac{-\dfrac{z^{n-1}dz}{(z^n-1)^{n+1/n}}}{\left(\dfrac{1}{z^n-1}\right)\left(\dfrac{z}{(z^n-1)^{1/n}}\right)} = -\int \frac{\dfrac{z^{n-1}dz}{(z^n-1)^{n+1/n}}}{\dfrac{z}{(z^n-1)^{n+1/n}}} = -\int z^{n-2}dz$$

$$= -\frac{z^{n-1}}{n-1} + C$$

pero: $z^n x^n = 1 + x^n \to z = \frac{(1+x^n)^{1/n}}{x} \to z^{n-1}$

$$= \frac{(1+x^n)^{n-1/n}}{x^{n-1}}$$

Por lo tanto :

$$\to -\frac{z^{n-1}}{n-1} + C = \frac{(1+x^n)^{n-1/n}}{(n-1)x^{n-1}} + C$$

8.- $\int \frac{2\sqrt{1+x^4}\,dx}{x^3} = Ln(x^2 + \sqrt{1+x^4}) - \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2} + C$

Solución.

Verificando se tiene que:

$\frac{m+1}{n} + \frac{r}{s} = \frac{-3+1}{4} + \frac{1}{2} = 0$,

estamos en el caso II $\to$ hacemos la sustitución:

$z^2 x^4 = 1 + x^4$, $x = \left(\frac{1}{z^2-1}\right)^{1/4}$, $dx = -\frac{zdz}{2(z^2-1)^{5/4}}$

$$\to \int \frac{2(1+x^4)^{1/2}}{x^3}dx = 2\int \frac{\left(\frac{z}{(z^2-1)^{1/2}}\right)\left(-\frac{zdz}{2(z^2-1)^{5/4}}\right)}{\left(\frac{1}{z^2-1}\right)^{3/4}}$$

$$= 2\int \frac{-\frac{z^2dz}{2(z^2-1)^{7/4}}}{\frac{1}{(z^2-1)^{3/4}}} = -\int \frac{z^2dz}{z^2-1} =$$

$$= -\int \left(1 + \frac{1}{z^2-1}\right)dz = -\int dz - \int \frac{dz}{z^2-1}$$

$$= -z - Ln\frac{z-1}{z+1} + C$$

pero: $z^2x^4 = 1 + x^4 \to z = \frac{(1+x^4)^{1/2}}{x^2}$

$$\to = Ln\frac{\sqrt{1+x^4} - x^2}{\sqrt{1+x^4} + x^2} - \frac{\sqrt{(1+x^4)}}{x^2} + C$$

$$= Ln\frac{\sqrt{1+x^4} + x^2}{\sqrt{1+x^4} - x^2} - \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2} + C$$

Calcular cada una de las siguientes integrales :

9.- $\int x^5\sqrt{1-x^3}\,dx$

Solución :

verificando $\frac{m+1}{n} = \frac{5+1}{3} = 2$, $\to$ nos hallamos en el caso I, $\to$ hacemos la siguiente sustitución:

$z^2 = 1 - x^3 \to x = (1-z^2)^{1/3} \to dx = -\frac{2}{3}\frac{zdz}{(1-z^2)^{2/3}}$

$$\int (1-z^2)^{5/3}(z)\left(-\frac{2}{3}\frac{zdz}{(1-z^2)^{2/3}}\right) = -\frac{2}{3}\int z^2(1-z^2)dz$$

$$= -\frac{2}{3}\int z^2dz + \frac{2}{3}\int z^4\,dz = -\frac{2}{9}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + C$$

pero: $z^2 = (1-x^3) \to z = (1-x^3)^{1/2}$

$$= -\frac{2}{9}(1-x^3)^{3/2} + \frac{2}{15}(1-x^3)^{5/2} + C$$

$$= \frac{2}{45}(1-x^3)^{3/2}\left[3(1-x^3) - 5\right] + C$$

$$= \frac{2}{45}(1-x^3)^{3/2}(-3x^3 - 2) + C$$

$$= -\frac{2}{45}(1-x^3)^{3/2}(3x^3 + 2) + C$$

10. $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{a+bx^3}}$

Solución.

Verificando $\frac{m+1}{n} = \frac{5+1}{3} = 2$, estamos en el caso II, hacemos la sustitución.

$$z^2 = a + bx^3 \rightarrow x = \left(\frac{z^2-a}{b}\right)^{1/3} \rightarrow dx = \frac{2z\,dz}{3\sqrt[3]{b}(z^2-1)^{2/3}}$$

$$\rightarrow \int \frac{\left(\frac{z^2-a}{b}\right)^{5/3}\left(\frac{2z\,dz}{3\sqrt[3]{b}(z^2-a)^{2/3}}\right)}{z} = \frac{2}{3b^2}\int \frac{(z^2-a)^{5/3}dz}{(z^2-1)^{2/3}}$$

$$= \frac{2}{3b^2}\int (z^2-a)dz$$

$$= \frac{2}{3b^2}\int z^2dz - \frac{2a}{3b^2}\int dz = \frac{2}{9b^2}z^3 - \frac{2a}{3b^2}z + C$$

$$= \frac{2}{9b^2}z(z^2-6a) + C$$

pero $z^2 = a + bx^3 \rightarrow z = (a+bx^3)^{1/2} + C$

$$= \frac{2}{9b^2}(a+bx^3)^{1/2}(a+bx^3-6a) + C$$

$$= \frac{2}{9b^2}(a+bx^3)^{1/2}(bx^3-5a) + C$$

11. $\int \frac{(x^5+2x^2)}{(1+x^3)^{3/2}}dx = \int \frac{x^5}{(1+x^3)^{3/2}}dx + 2\int \frac{x^2dx}{(1+x^3)^{3/2}}$

Solución :

(a) $\int \frac{x^5dx}{(1+x^3)^{3/2}} =$

Verificando $\frac{m+1}{n} = \frac{5+1}{3} = 2$, estamos en el caso I $\rightarrow$ hacemos la sustitución.

$$1 + x^3 = z^2 \rightarrow x = (z^2-1)^{1/3} \rightarrow dx = \frac{2z\,dz}{3(z^2-1)^{2/3}}$$

$$\int \frac{(z^2-1)^{5/3}\left(\frac{2z\,dz}{3(z^2-1)^{2/3}}\right)}{z^3} = \frac{2}{3}\int \frac{z(z^2-1)}{z^3}dz$$

$$= \frac{2}{3}\int \left(1 - \frac{1}{z^2}\right)dz$$

$$= \frac{2}{3}\int dz - \frac{2}{3}\int \frac{dz}{z^2} = \frac{2}{3}z + \frac{2}{3z} + C = \frac{2}{3}\left(\frac{z^2+1}{z}\right) + C$$

pero $z^2 = 1 + x^3 \rightarrow z = (1+x^3)^{1/2}$

$$\rightarrow = \frac{2}{3}\frac{(x^3+2)}{(x^3+1)^{1/2}} + C$$

(b) $2\int \frac{x^2dx}{(1+x^3)^{3/2}} =$

Verificando $\frac{m+1}{n} = \frac{2+1}{3} = 1$ nos hallamos en el caso I, $\rightarrow$ realizamos la sustitución:

$$1 + x^3 = z^2 \rightarrow x = (z^2-1)^{1/3} \rightarrow dx = \frac{2z\,dz}{3(z^2-1)^{2/3}}$$

$$\rightarrow 2\int \frac{(z^2-1)^{2/3}\left(\frac{2z\,dz}{3(z^2-1)^{2/3}}\right)}{z^3} = \frac{4}{3}\int \frac{dz}{z^2} = -\frac{4}{3z} + C$$

pero $z^2 = 1 + x^3$, $\rightarrow z = (1+x^3)^{1/2}$

$$\rightarrow -\frac{4}{3(1+x)^{1/2}} + C$$

$\therefore$ de (a) y (b) se tiene :

$$\int \frac{(x^5+2x^2)}{(1+x^3)^{3/2}}dx = \frac{2}{3}\frac{(x^3+2)}{(x^3+1)^{1/2}} - \frac{4}{3(1+x^3)^{1/2}} + C$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{x^3+1}}(x^3) + C = \frac{2x^3}{3x^3+1} + C$$

TRANSFORMACION DE LAS DIFERENCIALES TRIGONOMETRICAS

TEOREMA: Una diferencial trigonométrica que contiene solo funciones racionales sen(u), cosu puede transformarse en otra expresión diferencial, racional en z, mediante la sustitución.

(*) $\tan \frac{u}{2} = z$, ó (lo que es lo mismo) por las sustituciones:

(**) $\text{sen}\,u = \frac{2z}{1+z^2}$, $\cos u = \frac{1-z^2}{1+z^2}$, $du = \frac{2dz}{1+z^2}$

Demostración:

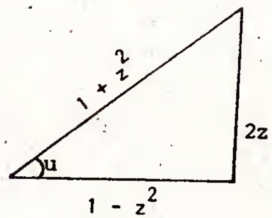
Se sabe que $\tan \frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos u}{1+\cos u}}$, → elevando al cuadrado ambos miembros se tiene:

$$\tan^2 \frac{u}{2} = \frac{1-\cos u}{1+\cos u} \equiv z^2 = \frac{1-\cos u}{1+\cos u}$$

(***) $\cos u = \frac{1-z^2}{1+z^2}$

El triángulo rectángulo muestra la relación (***) y de el se deduce.

$$\text{sen}\,u = \frac{2z}{1+z^2}$$



finalmente:

$$\tan \frac{u}{2} = z \to u = 2\arctan z \to du = \frac{2dz}{1+z^2}$$

por lo que queda demostrada la relacion (**)

PROBLEMAS:

VERIFICAR LAS SIGUIENTES INTEGRACIONES:

1.- $\int \frac{d\theta}{1+\text{sen}\theta+\cos\theta} = \text{Ln}(1+\tan\frac{\theta}{2}) + C$

Solución.

por el teorema se tiene que:

$\tan\frac{\theta}{2} = z$, $\cos\theta = \frac{1-z^2}{1+z^2}$, $\text{sen}\theta = \frac{2z}{1+z^2}$, $d\theta = \frac{2dz}{1+z^2}$

$$\to \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{1+\frac{2z}{1+z^2}+\frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int\frac{2dz}{2(z+1)} = \int\frac{dz}{z+1} = \text{Ln}(z+1) + C$$

pero $\tan\frac{\theta}{2} = z \to$

$$= \text{Ln}(z+1) + C = \text{Ln}(\tan\frac{\theta}{2}+1) + C$$

2.- $\int\frac{dx}{\text{sen}x+\tan x} = \frac{1}{2}\text{Ln}\tan\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2} + C$

Solución.

por el teorema se tiene:

$\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$, $\text{sen}x = \frac{2z}{1+z^2}$, $dx = \frac{2dz}{1+z^2}$, $\tan\frac{x}{2} = z$

$$\to \int\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2}+\frac{2z}{1-z^2}} = \frac{1}{2}\int\frac{(1-z^2)dz}{z} = \frac{1}{2}\int\frac{dz}{z} - \frac{1}{2}\int z\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\text{Ln}z - \frac{1}{4}z^2 + C$$

pero $z = \tan\frac{x}{2} \to$

$$= \frac{1}{2}\text{Ln}(\tan\frac{x}{2}) - \frac{1}{4}\tan^2(\frac{x}{2}) + C$$

3.- $\displaystyle\int \frac{dx}{4+5\cos x} = \frac{1}{3}\,\mathrm{Ln}\left(\frac{tg\,\frac{x}{2}+3}{tg\,\frac{x}{2}-3}\right) + C$

Solución.

Haciendo la sustitución:

$$tg\,\frac{x}{2} = z \;\rightarrow\; \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}\,, \quad dx = \frac{2dz}{1+z^2}$$

$$\rightarrow \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{4+5\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)} = 2\int \frac{dz}{9-z^2} = -\frac{1}{3}\int \frac{dz}{z+3} - \frac{1}{3}\int \frac{dz}{z-3}$$

$$= \frac{1}{3}\,\mathrm{Ln}(z+3) - \frac{1}{3}\,\mathrm{Ln}(z-3) + C = \frac{1}{3}\,\mathrm{Ln}\left(\frac{z+3}{z-3}\right) + C$$

$$= \frac{1}{3}\,\mathrm{Ln}\left(\frac{tg\,\frac{x}{2}+3}{tg\,\frac{x}{2}-3}\right) + C$$

4.- $\displaystyle\int \frac{d\alpha}{3+\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,tg\,\frac{\alpha}{2}\right) + C$

Solución.

Haciendo la sustitución.

$$tg\,\frac{\alpha}{2} = z \;\rightarrow\; \cos\alpha = \frac{1-z^2}{1+z^2}\,, \quad d\alpha = \frac{2dz}{1+z^2}\,,$$

$$\rightarrow \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{3+\frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{dz}{z^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{z}{\sqrt{2}} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,tg\,\frac{\alpha}{2}\right) + C$$

5.- $\displaystyle\int \frac{dx}{2\,\mathrm{sen}x - \cos x + 3} = \mathrm{arctg}\left(1 + 2tg\,\frac{x}{2}\right) + C$

Solución.

Haciendo la sustitución.

$$tag\,\frac{x}{2} = z \;\rightarrow\; \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}\,, \quad \mathrm{sen}x = \frac{2z}{1+z^2}\,, \quad dx = \frac{2dz}{1+z^2}$$

$$\rightarrow \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{4z}{1+z^2} - \frac{1-z^2}{1+z^2} + 3} = \int \frac{2dz}{4z^2+4z+2} = \int \frac{2dz}{(2z+1)^2+1}$$

$$\rightarrow \text{Sea } U = 2z+1 \;\rightarrow\; \frac{dU}{2} = dz$$

$$\rightarrow \int \frac{du}{u^2+1} = \mathrm{arctg}(u) + C = \mathrm{arctg}(2z+1) + C$$

$$= \mathrm{arctg}\left(2\,tg\,\frac{x}{2} + 1\right) + C$$

6.- $\displaystyle\int \frac{dx}{4\sec x + 5} = \frac{2}{5}\,\mathrm{arctg}\left(tg\,\frac{x}{2}\right) + \frac{4}{15}\,\mathrm{Ln}\left(\frac{tg\,\frac{x}{2}-3}{tg\,\frac{x}{2}+3}\right) + C$

Solución.

Haciendo la sustitución:

$$tg\,\frac{x}{2} = z\,, \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}\,, \quad dx = \frac{2dz}{1+z^2}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\frac{1-z^2}{1+z^2}} = \frac{1+z^2}{1-z^2}$$

$$\rightarrow \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{4\left(\frac{1+z^2}{1-z^2}\right)+5} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{9-z^2}{1-z^2}} = 2\int \frac{(1-z^2)\,dz}{(1+z^2)(9-z^2)}$$

$$\frac{1-z^2}{(1+z^2)(9-z^2)} = \frac{Az+B}{1+z^2} + \frac{Cz+D}{9-z^2} =$$

$$= (Az+B)(1+z^2) + (Cz+D)(9-z^2)$$

$$(1-z^2) = (C-A)z^3 + (D-B)z^2 + (9A+C)z + 9B + D$$

igualando los coeficientes de la misma potencia de z, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} C - A = 0 \\ D - B = -1 \\ 9A + C = 0 \\ 9B + D = 1 \end{array}\right\} \rightarrow A = C = 0, \quad B = \frac{1}{5}, \quad D = -\frac{4}{5}$$

$$\rightarrow 2\int \left(\frac{Az + B}{1 + z^2} + \frac{Cz + D}{9 - z^2}\right)dz = \frac{2}{5}\int \frac{dz}{1 + z^2} - \frac{8}{5}\int \frac{dz}{9 - z^2}$$

$$= \frac{2}{5}\int \frac{dz}{1 + z^2} + \frac{8}{5}\int \frac{dz}{z^2 - 9} = \frac{2}{5}\operatorname{arctg} z + \frac{4}{15}\operatorname{Ln}\left(\frac{z - 3}{z + 3}\right) + C$$

pero $z = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \rightarrow$

$$= \frac{2}{5}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + \frac{4}{15}\operatorname{Ln}\left(\frac{\operatorname{tg} x/2 - 3}{\operatorname{tg} x/2 + 3}\right) + C$$

7.- $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{4 - 3\cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{7}}$

Solución.

efectuando la sustitución.

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = z \rightarrow \cos\theta = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}, \quad d\theta = \frac{2dz}{1 + z^2}$$

$$\rightarrow \int_0^{\pi} \frac{\frac{2dz}{1 + z^2}}{4 - 3\left(\frac{1 - z^2}{1 + z^2}\right)} = \int \frac{2dz}{1 + 7z^2} = \int \frac{2dz}{1 + (\sqrt{7}z)^2}$$

$$u = \sqrt{7}\, z \rightarrow \frac{du}{\sqrt{7}} = dz$$

$$\rightarrow \frac{2}{\sqrt{7}}\int_0^{\pi} \frac{du}{1 + u^2} = \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg} u\Big]_0^{\pi} = \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\sqrt{7}\cdot z\Big]_0^{\pi} -$$

$$= \left[\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{7}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{7}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}(0)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{7}} \qquad (\operatorname{arctg}(\infty) = \theta \rightarrow \operatorname{tg}\theta = \infty \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2})$$

8.- $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{12 + 13\cos\varphi} = \frac{1}{5}\operatorname{Ln}\frac{3}{2}$

Solución.

Haciendo la sustitución.

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = z \rightarrow \cos\varphi = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}, \quad d\varphi = \frac{2dz}{1 + z^2}$$

$$\rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{\frac{2dz}{1 + z^2}}{12 + 13\left(\frac{1 - z^2}{1 + z^2}\right)} = 2\int_0^{\pi/2} \frac{dz}{25 - z^2} = 2\int_0^{\pi/2} \frac{dz}{(5 - z)(5 + z)}$$

$$\frac{1}{(5 - z)(5 + z)} = \frac{A}{5 - z} + \frac{B}{5 + z} = A(5 + z) + B(5 - z) =$$

$$= 5A + Az + 5B - Bz$$

$$1 = (A - B)z + 5A + 5B$$

igualando los coeficientes de la misma potencia dz

$$\left.\begin{array}{l} A - B = 0 \\ 5A + 5B = 1 \end{array}\right\} \rightarrow A = B = \frac{1}{10}$$

$$\rightarrow 2\int_0^{\pi/2} \left(\frac{A}{5 - z} + \frac{B}{5 + z}\right)dz = \frac{1}{5}\int_0^{\pi/2} \frac{dz}{5 - z} + \frac{1}{5}\int_0^{\pi/2} \frac{dz}{5 + z} =$$

$$= -\frac{1}{5}\operatorname{Ln}(5 - z) + \frac{1}{5}\operatorname{Ln}(5 + z)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{5}\operatorname{Ln}\left(\frac{5 + z}{5 - z}\right)\Big]_0^{\pi/2}$$

pero $z = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$

$$\rightarrow = \frac{1}{5}\operatorname{Ln}\left(\frac{5 + \operatorname{tg}\varphi/2}{5 - \operatorname{tg}\varphi/2}\right)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{5}\operatorname{Ln}\frac{5 + 1}{5 - 1} = \frac{1}{5}\operatorname{Ln}\frac{6}{4} = \frac{1}{5}\ln\frac{3}{2}$$

9.- $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \operatorname{sen}x} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

Solución.

efectuamos la siguiente sustitución:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z \rightarrow \cos x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}, \quad \operatorname{sen} x = \frac{2z}{1 + z^2}, \quad dx = \frac{2dz}{1 + z^2}$$

$$\rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{\frac{2dz}{1 + z^2}}{2 + \frac{2z}{1 + z^2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{2dz}{2z^2 + 2z + 2} = \int_0^{\pi/2} \frac{dz}{z^2 + z + 1} =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \frac{dz}{(2z + 1)^2 + 3}$$

$$\rightarrow u = 2z + 1 \rightarrow \frac{du}{2} = dz$$

$$2\int_0^{\pi/2} \frac{du}{u^2 + 3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{3}} + C = \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2z + 1}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^{\pi/2}$$

pero $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$

$$\rightarrow = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}}\right)\Bigg]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

10. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{3 + 5 \operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{4} \operatorname{Ln} 3$

Solución.

efectuando la siguiente sustitución

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z, \quad \cos x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}, \quad \operatorname{sen} x = \frac{2z}{1 + z^2}, \quad dx = \frac{2dz}{1 + z^2}$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\frac{2dz}{1 + z^2}}{3 + 5\left(\frac{2z}{1 + z^2}\right)} = \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \frac{dz}{z^2 + \frac{10}{3}z + 1} = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \frac{2dz}{(z + 3)(z + 1/3)}$$

$$\frac{2}{(z + 3)(z + 1/3)} = \frac{A}{z + 3} + \frac{B}{z + 1/3} =$$

$$= A(z + 1/3) + B(z + 3)$$

$$2 = (A + B)z + \frac{A}{3} + 3B$$

igualando los coeficientes de la misma potencia de z se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} A + B = 0 \\ \frac{A}{3} + 3B = 2 \end{array}\right\} \quad A = -\frac{3}{4}, \quad B = \frac{3}{4}$$

$$\rightarrow \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{A}{z + 3} + \frac{B}{z + 1/3}\right) = -\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \frac{dz}{z + B} + \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \frac{dz}{z + 1/3}$$

$$= -\frac{1}{4} \operatorname{Ln}(z + 3) + \frac{1}{4} \operatorname{Ln}(z + 1/3)\Bigg]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4} \operatorname{Ln}\left(\frac{z + 1/3}{z + 3}\right)\Bigg]_0^{\pi/2}$$

$$= -\frac{1}{4} \operatorname{Ln}\left(\frac{z + 1/3}{z + 3}\right)\Bigg]_0^{\pi/2}$$

pero $z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$

$$\rightarrow \frac{1}{4} \operatorname{Ln}\left(\frac{\operatorname{tg} x/2 + 1/3}{\operatorname{tg} x/2 + 3}\right)\Bigg]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4} \operatorname{Ln}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + 3}\right) - \frac{1}{4} \operatorname{Ln} \frac{1/3}{3}$$

$$= \frac{1}{4} \operatorname{Ln} \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 + 3} - \frac{1}{4} \operatorname{Ln} \frac{1}{4} \operatorname{Ln}\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4} \operatorname{Ln}\left(\frac{1}{9}\right)$$

$$= -\frac{1}{4} \operatorname{Ln} 3 + \frac{1}{4} \operatorname{Ln} 3 + \frac{1}{4} \operatorname{Ln} 3 = \frac{1}{4} \operatorname{Ln} 3.$$

CALCULAR CADA UNA DE LAS SIGUIENTES INTEGRALES

11. $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen}x - \cos x} =$

Solución :

Haciendo la sustitución:

$$tg\ x/2 = z, \quad \cos x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}, \ \operatorname{sen}x = \frac{2z}{1 + z^2}, \ dx = \frac{2dz}{1 + z^2}$$

$$\rightarrow \int \frac{\frac{2dz}{1 + z^2}}{1 + \frac{2z}{1 + z^2} - \frac{1 - z^2}{1 + z^2}} = \int \frac{2dz}{2z^2 + 2z} = \int \frac{dz}{z^2 + z} =$$

$$\frac{1}{z^2 + z} = \frac{1}{z(z + 1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z + 1} = A(z + 1) + Bz$$

$$1 = (A + B)z + A$$

igualando los coeficientes de la misma potencia de z,

$$\left.\begin{array}{l} A + B = 0 \\ A = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \quad A = 1, \ B = -1$$

$$\rightarrow \int \left(\frac{A}{z} + \frac{B}{z + 1}\right) dz = \int \frac{dz}{z} - \int \frac{dz}{z + 1}$$

$$= \operatorname{Ln} z - \operatorname{Ln}(z + 1) + C$$

pero; $tg\ x/2 = z$

$$\rightarrow \ = \operatorname{Ln}(tg\ x/2) - \operatorname{Ln}(tg\ x/2 + 1) + C$$

$$= \operatorname{Ln}\left(\frac{tg\ x/2}{tg\ x/2+1}\right) + C$$

12. $\int \frac{d\theta}{ctg\theta + \csc\theta}$

Solución :

Haciendo la sustitución:

$$tg\ \frac{\theta}{2} = z, \quad \rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}, \ \operatorname{sen}\theta = \frac{2z}{1 + z^2}, \ d\theta = \frac{2dz}{1 + z^2}$$

$$ctg\ \theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1-z^2/1+z^2}{2z/1+z^2} = \frac{1 - z^2}{2z},$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{\frac{2z}{1 + z^2}} = \frac{1 + z^2}{2z}$$; en la integral se tiene:

$$\rightarrow \int \frac{d\theta}{ctg\theta + \csc\theta} = \int \frac{\frac{2dz}{1 + z^2}}{\frac{1 - z^2}{2z} + \frac{1 + z^2}{2z}} = \int \frac{2zdz}{1+z^2} =$$

$$= \int \frac{d(1 + z^2)}{1 + z^2} = \operatorname{Ln}(1 + z^2) + C$$

pero $tg\ x/2 = z$

$$= \operatorname{Ln}\left(1 + tg^2 \frac{x}{2}\right) + C$$

13. $\int \frac{dt}{13 \cos t - 5} =$

Solución :

Haciendo la sustitución:

$$tg\ \frac{t}{2} = z\ , \quad \cos t = \frac{1 = z^2}{1 + z^2}, \quad dt = \frac{2dz}{1 + z^2}$$

$\rightarrow$ en la integral se tiene:

$$\int \frac{\frac{2dz}{1 + z^2}}{13\left(\frac{1 - z^2}{1 + z^2}\right) - 5} = \int \frac{2dz}{8 - 18z^2} = \int \frac{dz}{4 - 9z^2} = \int \frac{dz}{4 - (3z)^2}$$

$$u = 3z \rightarrow \frac{du}{3} = dz$$

$$\rightarrow \frac{1}{3} \int \frac{du}{4 - u^2} = \frac{1}{12} \operatorname{Ln}\left(\frac{2 + u}{2 - u}\right) + C = \frac{1}{12} \operatorname{Ln} \frac{2 + 3z}{2 - 3z} + C$$

pero $tg\ x/2 = z$

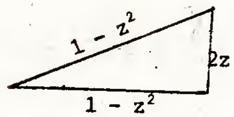
$$\rightarrow \ = \frac{1}{12} \operatorname{Ln}\left(\frac{2 + 3\ tg\ x/2}{2 - 3\ tg\ x/2}\right) + C$$

14. $\int \frac{dx}{1 + 2\,senx}$

Solución :

Haciendo la sustitución:

$tg\,\frac{x}{2} = z$, $\cos x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2} \rightarrow$



$\rightarrow senx = \frac{2z}{1 + z^2}$, $dx = \frac{2dz}{1 + z^2}$

$$\int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{1 + \frac{4z}{1+z^2}} = \int \frac{2dz}{z^2 + 4z + 1} = 2\int \frac{dz}{z^2 + 4z + 1} =$$

$$= 2\int \frac{dz}{(z + 2)^2 - 3}$$

$u = z + 2 \rightarrow du = dz$

$$\rightarrow 2\int \frac{du}{u^2 - 3} = \frac{1}{\sqrt{3}} Ln \frac{u - \sqrt{3}}{u + \sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} Ln \frac{z + 2 - \sqrt{3}}{z + 2 + \sqrt{3}} + C$$

pero $tg\,\frac{x}{2} = z$

$$\rightarrow = \frac{1}{\sqrt{3}} Ln \frac{tg\,x/2 + 2 - \sqrt{3}}{tg\,x/2 + \sqrt{3} + 2} + C$$

15. $\int \frac{sen\theta\,d\theta}{5 + 4sen\theta}$

Solución :

Haciendo la sustitución.

$tg\,\frac{\theta}{2} = z \rightarrow \cos\theta = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}$, $sen = \frac{2z}{1 + z^2}$, $d\theta = \frac{2dz}{1 + z^2}$

en la integral se tiene:

$$\int \frac{sen\theta\,d\theta}{5 + 4sen\theta} = \int \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{4}\left(\frac{1}{5 + 4\,sen\theta}\right)\right) d\theta =$$

$$= \frac{1}{4}\int d\theta - \frac{5}{4}\int \frac{d\theta}{4 + 5\,sen\theta}$$

$$\rightarrow = \frac{1}{4}\int \frac{2dz}{1 + z^2} - \frac{5}{4}\int \frac{\frac{2dz}{1 + z^2}}{5 + 4\left(\frac{2z}{1 + z^2}\right)} = \frac{1}{4}\int \frac{2dz}{1 + z^2} -$$

$$- \frac{5}{4}\int \frac{2dz}{5z^2 + 8z + 5}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dz}{1 + z^2} - \frac{5}{2}\int \frac{dz}{5z^2 + 8z + 5} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{1 + z^2}$$

$$- \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2 + \frac{8}{5}z + 1}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dz}{1 + z^2} - 50\int \frac{dz}{(5z + 8)^2 + 19} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{1 + z^2} -$$

$$= \frac{1}{2}\ \frac{dz}{1 + z^2} - 10\int \frac{d(5z + 8)}{(5z + 8)^2 + 19}$$

$$= \frac{1}{2}\,arctg\,z - \frac{10}{\sqrt{19}}\,arctg\left(\frac{5z + 8}{19}\right) + C$$

pero $tg\,\frac{\theta}{2} = z$

$$\rightarrow \frac{1}{2}\,arctg\left(tg\,\frac{\theta}{2}\right) - \frac{10}{\sqrt{19}}\,arctg\left(\frac{5\,tg\,\frac{\theta}{2} + 8}{19}\right) + C$$

16. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 + 3\cos x}$

Solución :

Haciendo la sustitución.

$$tg\,\frac{x}{2} = z \rightarrow \cos x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}, \quad dx = \frac{2dz}{1 + z^2}$$

en la integral se tiene:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\frac{2dz}{1 + z^2}}{5 + \frac{3(1 - z^2)}{1 + z^2}} = \int_0^{2\pi} \frac{2dz}{8 + 2z^2} = \int_0^{2\pi} \frac{dz}{4 + z^2} = \frac{1}{2}\,arctg\,\frac{z}{2}\Big]_0^{2\pi}$$

pero $z = tg\,\frac{x}{2}$

$\rightarrow$ se tiene:

$$\frac{1}{2}\,arctg(tg\,\frac{x}{2})\Big]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\,arctg(tg(\pi)) - \frac{1}{2}\,arctg(tg(0)) = \frac{\pi}{2}$$

17. $\int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{2 + \cos\alpha}$

Solución :

Haciendo la sustitución.

$$tg\,\frac{\alpha}{2} = z \rightarrow \cos\alpha = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}, \quad d\alpha = \frac{2dz}{1 + z^2}$$

en la integral se tiene:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\frac{2dz}{1 + z^2}}{2 + \frac{1 - z^2}{1 + z^2}} = \int \frac{2dz}{z^2 + 3} = 2\int \frac{dz}{z^2 + 3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,arctg\,\frac{z}{\sqrt{3}}\Big]_0^{\pi/2}$$

pero $tg\,\frac{\alpha}{2} = z$

$$\rightarrow = \frac{2}{\sqrt{3}}\,arctg(\frac{1}{\sqrt{3}}\,tg\,\frac{\alpha}{2})\Big]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{2}{3}\,arctg(\frac{1}{3}\,tg\,\frac{}{4}) - \frac{2}{3}\,arctg\,(\frac{1}{3}\,tg0°)$$

SUSTITUCIONES DIVERSAS

La sustitución bastante útil que se frecuenta hacer es:

$$x = \frac{1}{z} \rightarrow dx = -\frac{dz}{z^2}$$

PROBLEMAS:

VERIFICAR LAS SIGUIENTES INTEGRACIONES

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 + x + x^2}} = Ln(\frac{Cx}{2 + x + 2\sqrt{1 + x + x^2}})$

Solución :

Haciendo la sustitución $x = \frac{1}{z}$, $dx = -\frac{dz}{z^2}$ en la integral se tiene:

$$\int \frac{-\frac{dz}{z^2}}{\frac{1}{z}\sqrt{1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + z + 1}}$$

Completando cuadrado se tiene:

$$-2\int \frac{dz}{\sqrt{(2z + 1)^2 + 3}}$$

$$u = 2z + 1 \rightarrow \frac{du}{2} = dz$$

$$\rightarrow = -\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 3}} = -Ln(u + \sqrt{u^2 + 3}) + Ln\,C$$

$$= -Ln(2z + 1 + \sqrt{(2z + 1)^2 + 3}) + Ln\,C$$

pero: $x = \frac{1}{z} \rightarrow z = \frac{1}{x}$

$$= -\operatorname{Ln}\left(\frac{2}{x} + 1 + \sqrt{\left(\frac{2}{x}+1\right)^2 + 3}\right) + \operatorname{Ln}C$$

$$= -\operatorname{Ln}\left(\frac{2 + x + 2\sqrt{1 + x + x^2}}{x}\right) + \operatorname{Ln}C$$

$$= \operatorname{Ln}\left(\frac{x}{2 + x + 2\sqrt{1 + x + x^2}}\right) + \operatorname{Ln} C =$$

$$= \operatorname{Ln}\left(\frac{xC}{2 + x + 2\sqrt{1 + x + x^2}}\right)$$

2.- $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - x + 2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Ln}\left(\frac{\sqrt{x^2 - x + 2} + x - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2 - x + 2} + x + \sqrt{2}}\right) + C$$

Solución. Haciendo la sustitución:

$z - x = \sqrt{x^2 - x + 2}$, despejamos

$$x = \frac{z^2 - 2}{2z - 1} \rightarrow dx = \frac{2(z^2 - z + 2)}{(2z - 1)^2}\, dz$$

en la integral se tiene:

$$\int \frac{\frac{2(z^2 - z + 2)}{(2z - 1)^2}\, dz}{\left(\frac{z^2 - 2}{2z - 1}\right)\left[\left(\frac{z^2 - 2}{2z - 1}\right)^2 - \frac{z^2 - 2}{2z - 1} + 2\right]^{1/2}}$$

$$= \int \frac{2(z^2 - z + 2)\, dx}{(z^2 - 2)((z^2 - 2)^2 - (z^2 - 2)(2z - 1) + 2(2z - 1)^2)^{1/2}}$$

$$= \int \frac{2(z^2 - z + 2)dz}{(z^2 - 2)(z^4 - 2z^3 + 5z^2 - 4z + 4)^{1/2}}$$

$$= 2\int \frac{(z^2 - z + 2)dz}{(z^2 - 2)\left[(z^2 - z + 2)^2\right]^{1/2}} = 2\int \frac{(z^2 - z + 2)dz}{(z^2 - 2)(z^2 - z + 2)}$$

$$= 2\int \frac{dz}{z^2 - 2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Ln}\frac{z - \sqrt{2}}{z + \sqrt{2}} + C$$

pero: $z - x = \sqrt{x^2 - x + 2} \rightarrow z = x + \sqrt{x^2 - x + 2}$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Ln}\left(\frac{\sqrt{x^2 - x + 2} + x - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2 - x + 2} + x + \sqrt{2}}\right) + C$$

3.- $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 2x - 1}} = 2\operatorname{arctg}(x + \sqrt{x^2 + 2x - 1}) + C$$

Solución:

Solución. Haciendo la sustitución:

$\sqrt{x^2 + 2x - 1} = z - x \rightarrow$ despejando x se tiene

$$x = \frac{z^2 + 1}{2 + 2z} \rightarrow dx = \frac{2(z^2 + 2z - 1)}{(2z + 2)^2}\, dz$$

$$\int \frac{\frac{2(z^2 + 2z - 1)}{(2z + 2)^2}\, dz}{\left(\frac{z^2 + 1}{2z + 2}\right)\left[\left(\frac{z^2 + 1}{2z + 2}\right)^2 + 2\left(\frac{z^2 + 1}{2z + 2}\right) - 1\right]^{1/2}} =$$

$$= \int \frac{\frac{2(z^2 + 2z - 1)dz}{(2z + 2)^2}}{\frac{z^2 + 1}{(2z + 2)^2}\left[(z^2 + 2)^2 + 2(z^2 + 1)(2z + 2) - (2z + 2)^2\right]^{1/2}}$$

$$= \int \frac{2(z^2 + 2z - 1)dz}{(z^2 + 1)\left[z^4 + 4z^3 + 2z^2 - 4z + 1\right]^{1/2}} =$$

$$= 2\int \frac{(z^2+2z-1)\,dz}{(z^2+1)\left[(z^2+2z-1)^2\right]^{1/2}}$$

$$= 2\int \frac{(z^2+\cancel{2z}-1)\,dz}{(z^2+1)(z^2\cancel{+2z}+1)} = 2\int \frac{dz}{z^2+1} = 2\ \text{arctg}\ z + C$$

pero $\quad z - x = \sqrt{x^2+2x-1} \quad \rightarrow \quad z = \sqrt{x^2+2x-1} + x$

$$\therefore = 2\ \text{arctg}\ z + C = 2\,\text{arctg}(\sqrt{x^2+2x-1} + x) + C$$

4.- $$\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{Ln}\left(\frac{\sqrt{2+2x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+2x}+\sqrt{2-x}}\right) + C$$

Solución.

Haciendo la sustitución $\sqrt{2+x-x^2} = (x+1)z$, elevando al cuadrado se tiene:

$$\rightarrow \quad 2+x-x^2 = (x+1)^2z^2 \quad \rightarrow$$

$$2+x-x^2 = x^2z^2 + 2xz^2 + 1z^2$$

$$\rightarrow \quad x^2(z^2+1) + (2z^2-1)x + z^2 - 2 = 0$$

$$= (x+1)\left(x - \frac{2-z^2}{z^2+1}\right) = 0 \quad \rightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{2-z^2}{1+z^2}$$

$\rightarrow$ para $x_1 = -1 \quad \rightarrow \quad dx_1 = 0$ se descarta

$\therefore \quad x_2 = \dfrac{2-z^2}{1+z^2} \quad \rightarrow \quad dx_2 = -\dfrac{6z\,dz}{(1+z^2)^2}$ es lo que nos sirve

para hallar la solución deseada

$$\rightarrow \int \frac{-\dfrac{6z\,dz}{(1+z^2)^2}}{\left(\dfrac{2-z^2}{1+z^2}\right)\left[2+\dfrac{2-z^2}{1+z^2}-\left(\dfrac{2-z^2}{1+z^2}\right)^2\right]^{1/2}} =$$

$$= \int \frac{-\dfrac{6z\,dz}{(1\cancel{+z^2})^2}}{\dfrac{2-z^2}{(1\cancel{+z^2})^2}\left[9z^2\right]^{1/2}} = -\int \frac{6z\,dz}{(2-z^2)\,3z}$$

$$= 2\int \frac{dz}{2-z^2} = 2\int \frac{dz}{z^2-2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{Ln}\left(\frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}}\right) + C$$

Como: $\quad z(x+1) = \sqrt{2+x-x^2} \quad \rightarrow \quad z = \dfrac{\sqrt{2+x-x^2}}{x+1} =$

$$= \sqrt{\frac{(1+x)(2-x)}{(1+x)^2}} \quad ; \quad z = \sqrt{\frac{2-x}{1+x}}$$

$$\therefore = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{Ln}\left(\frac{\sqrt{\dfrac{2-x}{1+x}}-\sqrt{2}}{\sqrt{\dfrac{2-x}{1+x}}+\sqrt{2}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{Ln}\left(\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+2x}}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2+2x}}\right) + C$$

5.- $$\int \frac{dx}{x\sqrt{5x-6-x^2}} = -\sqrt{\frac{2}{3}}\ \text{arctg}\sqrt{\frac{2(3-x)}{3(x-2)}} + C$$

Solución.

Hacemos la sustitución: $\sqrt{5x-6-x^2} = (x-2)z$

elevando al cuadrado para despejar x.

$$5x-6-x^2 = (x-2)^2z^2 = x^2z^2 - 4xz^2 + 4z^2$$

$$x^2(z^2+1) - x(4z^2+5) + 4z^2 + 6 = 0$$

$$(x-2)\left(x - \frac{z^2+3}{z^2+1}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{2z^2+3}{z^2+1}$$

para $x_1 = 2, \quad \rightarrow \quad dx_1 = 0$ se descarta

para $x_2 = \dfrac{2z^2+3}{z^2+1} \quad \rightarrow \quad dx = \dfrac{-2z\,dz}{(z^2+1)^2}$

$$\int \frac{-\dfrac{2z\,dz}{(z^2+1)^2}}{\left(\dfrac{2z^2+3}{z^2+1}\right)\left[5\left(\dfrac{2z^2+3}{z^2+1}\right) - 6 - \left(\dfrac{2z^2+3}{z^2+1}\right)^2\right]^{1/2}} =$$

$$= \int \frac{-\dfrac{2z\,dz}{(z^2+1)^2}}{\dfrac{2z^2+3}{(z^2+1)^2}(z^2)^{1/2}} = -\int \frac{2z\,dz}{(2z^2+3)z}$$

$$= -2\int \frac{dz}{2z^2+3} = -\int \frac{dz}{z^2+\frac{3}{2}} = -\sqrt{\frac{2}{3}}\ \text{arctg}\ \frac{z}{\sqrt{3/2}} + C$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{3}}\ \text{arctg}\ \sqrt{\frac{2}{3}}\ z + C$$

pero: $\sqrt{5x-6-x^2} = (x-2)z \rightarrow z = \dfrac{\sqrt{5x-6-x^2}}{x-2}$

$$\rightarrow z = \sqrt{\frac{(x-2)(3-x)}{(x-2)^2}} = \sqrt{\frac{3-x}{x-2}}$$

$$\rightarrow = -\sqrt{\frac{2}{3}}\ \text{arctg}\ \sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{3-x}{x-2}} + C = -\sqrt{\frac{2}{3}}\ \text{arctg}\sqrt{\frac{2(3-x)}{3(x-2)}} + C$$

6. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}} = -\text{arcsen}\left(\frac{1+x}{2x}\right) + C$$

Solución : Haciendo la sustitución de

$$x = \frac{1}{z}, \quad \rightarrow dx = -\frac{dz}{z^2} \quad \rightarrow$$

en la integral se tiene:

$$\int \frac{-dz/z^2}{\frac{1}{z}\left(\frac{3}{z^2} - \frac{2}{z} - 1\right)^{1/2}} = \int \frac{-dz/z^2}{\frac{1}{z^2}(3-2z-z^2)^{1/2}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{3-2z-z^2}}$$

Completando cuadrado en el denominador se tiene:

$$-\int \frac{dz}{\sqrt{4-(z+1)^2}} \quad ; \quad u = z+1 \rightarrow du = dz$$

$$\rightarrow = -\int \frac{du}{\sqrt{4-u^2}} = -\text{arcsen}\ \frac{u}{2} + C = -\text{arcsen}\ \frac{z+1}{2} + C$$

pero $x = \dfrac{1}{z} \rightarrow z = \dfrac{1}{x}$

$$\rightarrow = -\text{arcsen}\left(\frac{\frac{1}{x}+1}{2}\right) + C = -\text{arcsen}\left(\frac{1+x}{2x}\right) + C$$

7.- $$\int \frac{-dx}{x\sqrt{1+4x+5x^2}} = \text{Ln}\left(\frac{1+2x+\sqrt{1+4x+5x^2}}{x}\right) + C$$

Solución.

Haciendo la sustitución $x = \dfrac{1}{z}$, $dx = -\dfrac{dz}{z^2}$

$$\rightarrow \int \frac{\dfrac{dz}{z^2}}{\frac{1}{z}\left(1+\frac{4}{z}+\frac{5}{z^2}\right)^{1/2}} = \int \frac{dz/z^2}{\frac{1}{z^2}(z^2+4z+5)^{1/2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{z^2+4z+5}}$$

Completando al cuadrado el denominador.

$$= \int \frac{dz}{\sqrt{(z+2)^2+1}} =$$

$u = z+2 \rightarrow dx = dz$

$$\rightarrow \int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = \text{Ln}(u+\sqrt{u^2+1}) + C$$

$$= \text{Ln}(z+2+\sqrt{(z+2)^2+1}) + C$$

pero $x = \dfrac{1}{z} \rightarrow z = \dfrac{1}{x}$

$$= \text{Ln}\left(\frac{1+2x+\sqrt{1+4x+5x^2}}{x}\right) + C.$$

8.- $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+2x+3x^2}} = -\frac{\sqrt{1+2x+3x^2}}{x} + \operatorname{Ln}\left(\frac{1+x+\sqrt{1+2x+3x^2}}{x}\right) + C$

Solución.

Haciendo la sustitución.

$$x = \frac{1}{z} \rightarrow dx = -\frac{dz}{z^2}$$

$$\rightarrow \int \frac{-\frac{dz}{z^2}}{\frac{1}{z^2}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{3}{z^2}\right)^{1/2}} = \int \frac{-\frac{dz}{z^2}}{\frac{1}{z^3}(z^2+2z+3)} = \int \frac{-z\,dz}{(z^2+2z+3)^{1/2}}$$

$$= -\int \frac{z\,dz}{\sqrt{z^2+2z+3}} = -\int \frac{\left[\frac{1}{2}(2z+2)-1\right]dz}{(z^2+2z+3)^{1/2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{(2z+2)\,dz}{\sqrt{z^2+2z+3}} + \int \frac{dz}{\sqrt{z^2+2z+3}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int (z^2+2z+3)^{-1/2}\,d(z^2+2z+3) + \int \frac{dz}{\sqrt{z^2+2z+3}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int (z^2+2z+3)^{-1/2}\,d(z^2+2z+3) + \int \frac{dz}{\sqrt{(z+1)^2+2}}$$

$$= -(z^2+2z+3)^{1/2} + \operatorname{Ln}(z+1+\sqrt{(z^2+1)^2+2}) + C$$

pero: $x = \frac{1}{z} \rightarrow z = \frac{1}{x}$

$$\rightarrow = -\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+3\right)^{1/2} + \operatorname{Ln}\left(\frac{1}{x}+1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+3}\right) + C$$

$$= -\frac{(1+2x+3x^2)^{1/2}}{x} + \operatorname{Ln}\left(\frac{1+x+\sqrt{1+2x+3x^2}}{x}\right) + C$$

9.- $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{27x^2+6x-1}} = \frac{\sqrt{27x^2+6x-1}}{x} - 3\arcsen\left(\frac{1-3x}{6x}\right) + C$

Solución. haciendo la sustitución.

$$x = \frac{1}{z}\ ,\ \rightarrow\ dx = -\frac{dz}{z^2}$$

en la integral se tiene:

$$\int \frac{-dz/z^2}{\frac{1}{z^2}\left(\frac{27}{z^2}+\frac{6}{z}-1\right)^{1/2}} = \int \frac{-dz/z^2}{\frac{1}{z^3}(27+6z-z^2)^{1/2}}$$

$$= -\int \frac{z\,dz}{\sqrt{27+6z-z^2}} = \int \frac{-z\,dz}{\sqrt{27+6z-z^2}}$$

$$= \int \frac{\left[\frac{1}{2}(6-2z)-3\right]dz}{\sqrt{27+6z-z^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{(6-2z)\,dz}{\sqrt{27+6z-z^2}} - 3\int \frac{dz}{\sqrt{27+6z-z^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int (27+6z-z^2)^{-1/2}\,d(27+6z-z^2) - 3\int \frac{dz}{\sqrt{27+6z-z^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int (27+6z-z^2)^{-1/2}\,d(27+6z-z^2) - 3\int \frac{dz}{\sqrt{36-(z^2+3)^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(27+6z-z^2)^{1/2}}{1/2} - 3\arcsen\frac{z+3}{6} + C$$

$$= (27+6z-z^2)^{1/2} - 3\arcsen\left(\frac{z+3}{6}\right) + C$$

pero $x = \frac{1}{z} \rightarrow z = \frac{1}{x}$

$$\rightarrow = \left(27+\frac{6}{x}-\frac{1}{x^2}\right)^{1/2} - 3\arcsen\left(\frac{\frac{1}{x}+3}{6}\right) + C$$

$$= \frac{(27x^2+6x-1)^{1/2}}{x} - 3\arcsen\left(\frac{1+3x}{6x}\right) + C$$

10. $\displaystyle\int_{1/3}^{1} \frac{(x - x^3)^{1/3}\,dx}{x^4} = 6$

Solución. Haciendo la sustitución.

$x = \frac{1}{z} \rightarrow dx = -\frac{dz}{z^2}$, en la integral se tiene:

$$\int_{1/3}^{1} \frac{(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^3})^{1/3}(-\frac{dz}{z^2})}{\frac{1}{z^4}} = \int_{1/3}^{1} \frac{-\frac{(z^2-1)^{1/3}dz}{z^3}}{\frac{1}{z^4}} = -\int_{1/3}^{1} z(z^2-1)^{1/3}dz$$

Sea $u = z^2 - 1 \rightarrow \frac{du}{2} = zdz$

$$\rightarrow -\frac{1}{2}\int_{1/3}^{1} u^{1/3}du = -\frac{1}{2}\frac{u^{4/3}}{4/3} + c = -\frac{3}{8}u^{4/3}\Big]_{1/3}^{1} =$$

$$-\frac{3}{8}(z^2 - 1)^{4/3}\Big]_{1/3}^{1}$$

pero: $z = \frac{1}{x}$

$$\rightarrow = -\frac{3}{8}(\frac{1}{x^2} - 1)^{4/3}\Big]_{1/3}^{1} = -\frac{3}{8}(\frac{1-x^2}{x^2})^{4/3}\Big]_{1/3}^{1}$$

$$= \frac{3}{8}(\frac{1-\frac{1}{9}}{\frac{1}{9}})^{4/3} = \frac{3}{8}(8)^{4/3} = \frac{3}{8}\cdot 8(8)^{1/3} = 3(2) = 6$$

11. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \operatorname{arctg}(e) - \frac{\pi}{4}$

Solución.

haciendo la sustitución.

$e^x = z \rightarrow$ despejamos x tomamos Ln a ambos miembros

$\rightarrow \operatorname{Ln} e^x = \operatorname{Ln}z \rightarrow x\operatorname{Ln}e = \operatorname{Ln}z \rightarrow x = \operatorname{Ln}z \rightarrow dx = \frac{dz}{z}$

en la integral se tiene:

$$\int_0^1 \frac{dz/z}{z + \frac{1}{z}} = \int_0^1 \frac{dz/z}{\frac{z^2+1}{z}} = \int_0^1 \frac{dz}{z^2+1} = \operatorname{arctg}z\Big]_0^1$$

pero $z = e^x$

$\rightarrow = \operatorname{arctg} e^x\Big]_0^1 = \operatorname{arctg}(e) - \operatorname{arctg}(e^\circ)$

$= \operatorname{arctg}(e) - \operatorname{arctg}(1) = \operatorname{arctg}(e) - \frac{\pi}{4}$

12. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{2t + t^2}\,dt = \sqrt{3} - \frac{1}{2}\operatorname{Ln}(2 + \sqrt{3})$

Solución. haciendo la sustitución.

$t + 1 = z \rightarrow t = z - 1 \rightarrow dt = dz$

en la integral se tiene:

$$\int_0^1 \sqrt{2(z-1) + (z-1)^2}\,dz = \int_0^1 \sqrt{2z-2+z^2-2z+1}\,dz = \int_0^1 \sqrt{z^2-1}\,dz$$

$$= \left[\frac{z}{2}\sqrt{z^2-1} - \frac{1}{2}\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2-1})\right]_0^1$$

pero $z = t + 1$

$$\rightarrow = \left[\frac{(t+1)}{2}\sqrt{t^2+2t} - \frac{1}{2}\operatorname{Ln}(t + 1 + \sqrt{t^2+2t})\right]_0^1$$

$$= \sqrt{3} - \frac{1}{2}\operatorname{Ln}(2 + \sqrt{3})$$

DETERMINAR EL VALOR DE CADA UNA DE LAS SIGUIENTES INTEGRALES

13. $\displaystyle\int \frac{4dx}{x\sqrt{x^2 - 2x + 3}}$

Solución. Hacemos la sustitución.

$\sqrt{x^2 - 2x + 3} = z - x$ despejando x

$x^2 - 2x + 3 = (z - x)^2 \rightarrow x^2 - 2x + 3 = z^2 - 2zx + x^2$

$$\rightarrow x(2z-2) = z^2-3 \rightarrow x = \frac{z^2-3}{2z-2} \rightarrow dx = \frac{(2z^2-4z+6)dz}{(2z-2)^2}$$

en la integral se tiene:

$$= 4\int \frac{\frac{2z^2-4z+6}{(2z-2)^2}dz}{(\frac{z^2-3}{2z-2})\left[(\frac{z^2-3}{2z-2})^2 - 2(\frac{z^2-3}{2z-2}) + 3\right]^{1/2}} =$$

$$= 4\int \frac{\frac{2(z^2-2z+3)}{(2z-2)^2}dz}{\frac{z^2-3}{(2z-2)^2}\left[z^4-4z^3+10z^2-12z+9\right]^{1/2}}$$

$$= 4\int \frac{2(z^2-2z+3)dz}{(z^2-3)\left[(z^2-2z+3)^2\right]^{1/2}} = 8\int \frac{(z^2-2z+3)dz}{(z^2-3)(z^2-2z+3)}$$

$$= 8\int \frac{dz}{z^2-3} = \frac{4}{\sqrt{3}}\cdot Ln(\frac{z-\sqrt{3}}{z+\sqrt{3}}) + c$$

pero: $z - x = \sqrt{x^2-2x+3} \rightarrow z = x + \sqrt{x^2-2x+3}$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}} \ln(\frac{x+\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{3}}{x+\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{3}}) + c$$

14. $\int \frac{4x\,dx}{(x^2-2x+3)^{3/2}}$

Solución. Haciendo la sustitución.

$\sqrt{x^2-2x+3} = z - x$ despejamos x:

$x^2 - 2x + 3 = (z-x)^2 = z^2 - 2zx + x^2$

$$\rightarrow x(2z-2) = z^2-3 \rightarrow x = \frac{z^2-3}{2z-2} \rightarrow dx = \frac{(2z^2-4z+6)dz}{(2z-2)^2}$$

en la integral se tiene:

$$\int \frac{4(\frac{z^2-3}{2z-2})(\frac{2z^2-4z+6}{(2z-2)^2})dz}{\left[(\frac{z^2-3}{2z-2})^2 - 2(\frac{z^2-3}{2z-2})+3\right]^{3/2}} = \int \frac{4(z^2-3)(2z^2-4z+6)dz}{(z^4-4z^3+10z^2-12z+9)^{3/2}}$$

$$8\int \frac{(z^2-3)(z^2-2z+3)dz}{\left[(z^2-2z+3)^2\right]^{3/2}} = 8\int \frac{(z^2-3)(z^2-2z+3)dz}{(z^2-2z+3)^3}$$

$$= 8\int \frac{(z^2-3)dz}{(z^2-2z+3)^2}$$

$$\frac{z^2-3}{(z^2-2z+3)^2} = \frac{Az+B}{(z^2-2z+3)^2} + \frac{(Cz+D)}{z^2-2z+3} =$$

$$z^2 - 3 = (Az+B) + (Cz+D)(z^2-2z+3)$$

$$z^2 - 3 = Cz^3 + (D-2C)z^2 + (3C-2D+A)z + B + 3D$$

igualando los coeficientes de la misma potencia de z, se tiene:

$$\begin{cases} C = 0 \\ D - 2C = 1 \\ 3C - 2D + A = 0 \\ B + 3D = -3 \end{cases} \qquad C = 0,\ D = 1,\ A = 2,\ B = -6$$

$$8\int (\frac{Az+B}{(z^2-2z+3)^2} + \frac{Cz+D}{z^2-2z+3})dz = 8\int \frac{(2z-6)dz}{(z^2-2z+3)^2} +$$

$$+ 8\int \frac{dz}{z^2-2z+3} = 8\int \frac{[(2x-2)-4]dx}{(z^2-2z+3)^2} + 8\int \frac{dz}{(z-1)^2+2}$$

$$= 8\int \frac{(2x-2)dz}{(z^2-2z+3)^2} - 32\int \frac{dz}{(z^2-2z+3)^2} + 8\int \frac{dz}{(z-1)^2+2}$$

$$= 8\int \frac{(2z-2)dz}{(z^2-2z+3)^2} - 32\int \frac{dz}{((z-1)^2+2)^2} + 8\int \frac{dz}{(z-1)^2+2}$$

$$= \frac{8}{z^2-2z+3} - \frac{32}{2}\left\{\frac{z}{4(z-1)^2+2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{(z-1)^2+2}\right\} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{z-1}{\sqrt{2}} + C$$

$$= \frac{8}{z^2-2z+3} - \frac{4z}{z^2-2z+3} + \frac{8}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{z-1}{\sqrt{2}} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{z-1}{\sqrt{2}} + C$$

$$= \frac{8}{z^2-2z+3} = \frac{4z}{z^2-2z+3} + \frac{9}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{z-1}{\sqrt{2}} + C$$

$$= \frac{8-4z}{z^2-2z+3} + \frac{9}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{z-1}{\sqrt{2}} + C$$

pero: $z - x = \sqrt{x^2-2x+3} \rightarrow z = x + \sqrt{x^2-2x+3}$

$$\rightarrow = \frac{8-4(x+\sqrt{x^2-2x+3})}{(x+\sqrt{x^2-2x+3})^2 - 2(x+\sqrt{x^2-2x+3}) + 3} +$$

$$+ \frac{9}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x^2-2x+3}+x-1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

15. $\displaystyle\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{5x-6-x^2}}$

Solución :
Haciendo la sustitución.

$\sqrt{5x-6-x^2} = (x-2)z$, despejando x,

$5x-6-x^2 = (x^2-2)^2z^2 = 5x-6-x^2 = x^2z^2 - 4z^2x + 4z^2$

$\rightarrow (z^2+1)x^2 - (4z^2+5)x + 4z^2 + 6 = 0$

$= (x-2)(x - \frac{2z^2+3}{z^2+1}) = 0 \rightarrow x_1 = 2,\quad x_2 = \frac{2z^2+3}{z^2+1}$

$dx_1 = 0$, se descarta, $\rightarrow$ tomamos x_2 para hallar la solución deseada.

$$dx_2 = \frac{-2z\,dz}{(z^2+1)^2}\ ;$$

en la integral se tiene

$$\int \frac{2\left(\frac{2z^2+3}{z^2+1}\right)\left(\frac{-2z\,dz}{(z^2+1)^2}\right)}{\left[5\left(\frac{2z^2+3}{z^2+1}\right) - 6 - \left(\frac{2z^2+3}{z^2+1}\right)^2\right]^{1/2}} =$$

$$= \int \frac{-\frac{4(2z^2+3)(z)dz}{(z^2+1)^3}}{\frac{[5(2z^2+3)(z^2+1) - 6(z^2+1)^2 - (2z^2+3)^2]^{1/2}}{z^2+1}}$$

$$= \int \frac{-4(2z^2+3)z\,dz}{(z^2+1)^2(z^2)^{1/2}} = -4\int \frac{(2z^2+3)z\,dz}{(z^2+1)^2 z} = -4\int \frac{(2z^2+3)dz}{(z^2+1)^2}$$

$$\rightarrow \frac{2z^2+3}{(z^2+1)^2} = \frac{Az+B}{(z^2+1)^2} + \frac{Cz+D}{(z^2+1)} = Az + B + (Cz+D)(z^2+1)$$

$$2z^2 + 3 = Cz^3 + Dz^2 + (A+C)z + B + D$$

igualando los coeficientes de la misma potencia de z;

$C = 0$

$D = 2 \quad \rightarrow \quad A = C = 0\ ,\quad B = 1,\quad D = 2$

$A + C = 0$

$B + D = 3$

Reemplazando en la integral se tiene:

$$-4\int\left(\frac{Az+B}{(z^2+1)^2}+\frac{Cz+D}{z^2+1}\right)dz = -4\int\frac{dz}{(z^2+1)^2} - 8\int\frac{dz}{z^2+1}$$

$$= -4\left\{\frac{z}{2(z^2+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^2+1}\right\} - 8\int\frac{dz}{z^2+1}$$

$$= \frac{-2z}{z^2+1} - 2\int\frac{dz}{z^2+1} - 8\int\frac{dz}{z^2+1}$$

$$= -\frac{2z}{z^2+1} - 2\,\text{arctg}\, z - 8\,\text{arctg}\, z + C$$

$$= -\frac{2z}{z^2+1} - 10\,\text{arctg}\, z + C$$

pero: $(x-2)z = \sqrt{5x-6-x^2} \to z = \dfrac{\sqrt{5x-6-x^2}}{(x-2)} =$

$$= \sqrt{\frac{(3-x)(x-2)}{(x-2)^2}} \to z = \sqrt{\frac{3-x}{x-2}}$$

$$\therefore\ = -\frac{2\sqrt{\frac{3-x}{x-2}}}{4\left(\frac{3-x}{x-2}\right)+1} - 10\,\text{arctg}\sqrt{\frac{3-x}{x-2}} + C$$

CAPITULO XVIII

CENTROS DE GRAVEDAD, PRESION DE LIQUIDOS, TRABAJO, VALOR MEDIO , MOMENTO DE SUPERFICIE

El centro de gravedad de una superficie plana definimos del siguiente modo: un trozo de cartón rígido, plano y horizontal, permanecerá en equilibrio si se sostiene en un punto determinado. Este punto de apoyo es el centro de gravedad de la superficie plana del cartón.

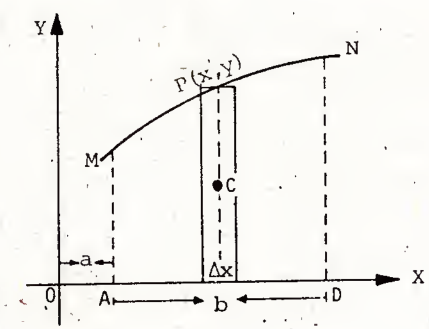
- Para algunas figuras que se estudian en la geometría elemental, las posiciones del centro de gravedad son evidentes.
- Para un rectángulo o un círculo, el centro de gravedad coincide con el centro geométrico de la fig.
- Si una fig. plana tiene un centro de simetría ese punto es el centro de gravedad.
- Si la fig. plana tiene un eje de simetría el centro de gravedad estará en el eje.

DETERMINACION DEL CENTRO DE GRAVEDAD MEDIANTE EL CALCULO INTEGRAL

Sea la superficie: AMPNB, dividamosla en n rectángulos, c/u con base Δx. además sea dA el área de los rectángulos y su centro de gravedad C(h,k)

$\to dA = y\,dx;\ h = x,$

$k = \frac{1}{2}y \ ....\ (1)$



El momento de superficie de este rectángulo con respecto a Ox(u Oy) es el producto de su área por la distancia de su centro de gravedad a Ox (u Oy). Si estos momentos son respectivamente dM_x y DM_y, entonces

$$dM_x = kdA; \quad dM_y = hdA \quad .... (2)$$

El momento de la superficie plana AMPNB se obtiene aplicando el teorema fundamental del cálculo a la suma de los momentos de la superficie, de los rectángulos fundamentales, de donde se obtiene que:

$$M_x = \int kdA, \; ; \; M_y = \int hdA \quad .... (3)$$

Si el centro de gravedad de la fig. AMPNB es $C(\bar{x},\bar{y})$ y el área A la relación entre los momentos de superficie (3) y $\bar{x}$ y $\bar{y}$ se dan por:

$$A_{\bar{x}} = M_y \; ; \; A_{\bar{y}} = M_x \quad .... (4)$$

Para calcular $(\bar{x},\bar{y})$; hallamos los momentos M_x, M_y que según (1) y (3) es:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx, \quad M_y = \int_a^b xydx$$

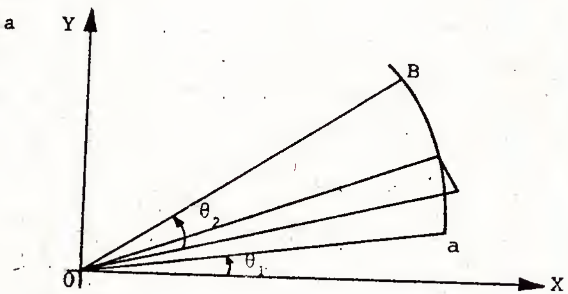
donde debe sustituirse el valor de y en función de x deducido de la curva MPN

Si el área A se conoce, entonces, de (4) tenemos:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{A}$$

COORDENADAS POLARES

Las coordenadas $(\bar{x},\bar{y})$ del centro geométrico de una área plana limitada por la curva $\rho = f(\theta)$ y los radios vectores $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$ se da por:



$$A\bar{x} = \bar{x}\,\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta}\rho^2 d\theta = \frac{1}{3}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\rho^3\cos\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{2}{3}\,x\,\rho^2 d\theta$$

$$A\bar{y} = \bar{y}\,\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\rho^2 d\theta = \frac{1}{3}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\rho^3\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{2}{3}\,y\,\rho^2 d\theta$$

y el área plana limitada por $\rho = f(\theta)$ y los radios vectores; $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$ viene dada por:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\rho^2 d\theta$$

PROBLEMAS:

Hallar el centro de gravedad de c/u de las superficies limitadas por las siguientes curvas:

1.- $y^2 = 2px$; $x = h$

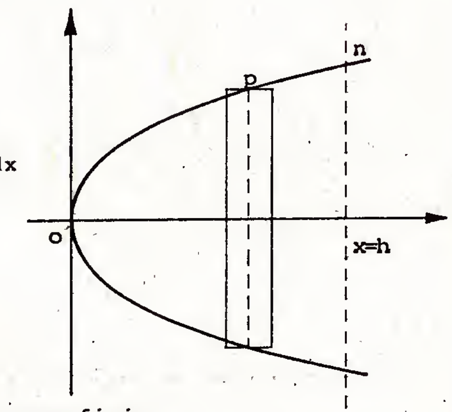
Solución.

1º Hallamos el área

$$A = \int_0^h dA = \int_0^h ydx = (2p)^{1/2}\int_0^h x^{1/2}dx$$

$$A = \frac{2}{3}(kp)^{1/2}x^{3/2}\Big]_0^h$$

$$= \frac{2}{3}(2p)^{1/2}h^{3/2} \quad ... (1)$$



2°) Hallamos los momentos de superficie

$$\rightarrow dM_x = kdA = \qquad \text{donde } k = 0 \; ; \; h = x, \; dA = ydx$$
$$dM_y = hdA$$

$$\rightarrow M_x = \int_0^h kdA = 0 \rightarrow M_x = 0 \quad .... (2)$$

$$M_y = \int_0^h xydx = (2p)^{1/2}\int_0^h x^{3/2}dx \rightarrow M_y = \frac{5}{2}(2p)^{1/2}x^{5/2}\Big]_0^h$$

$$= \frac{5}{2}(2p)^{1/2}h^{5/2} \rightarrow M_y = \frac{5}{2}(2p)^{1/2}h^{5/2} \quad ... (3)$$

de (1), (2) y (3) se tiene que:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{\frac{2}{5}(2p)^{1/2}h^{5/2}}{2/3(2p)^{1/2}h^{3/2}} = \frac{3}{5}h$$

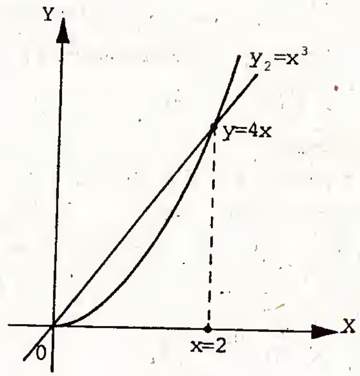
$$\bar{y} = \frac{M_x}{A} = 0$$

$\rightarrow$ el centro de gravedad $(\bar{x},\bar{y}) = (\frac{3}{5}h, 0)$

2.- $y = x^3$; $y = 4x$ (primer cuadrante)

Solución :

Sea (h,k) el centro de gravedad.



$\rightarrow$ $dA = (4x - x^3)dx$;

$h = x$; $k = \frac{1}{2}(4x + x^3)$

$$\rightarrow A = \int_0^2 dA = \int_0^2 (4x - x^3)dx$$

$$= 2x^2 - \frac{1}{4}x^4\Big]_0^2$$

$A = 4$ .... (1)

Los momentos de superficie serán:

$$M_y = \int_0^2 h\,dA = \int_0^2 x(4x - x^3)dx = \int_0^2 (4x^2 - x^4)dx = \left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^2$$

$M_y = \frac{64}{15}$ ..... (2)

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^2 k\,dA = \frac{1}{2}\int_0^2 (4x + x^3)(4x - x^3)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (16x^2 - x^6)dx$$

$$M_x = \frac{1}{2}\left[\frac{16}{3}x^3 - \frac{x^7}{7}\right]_0^2 = \frac{256}{21}$$

$\rightarrow$ $M_x = \frac{256}{21}$ ...... (3)

de (1), (2) y (3) se tiene:

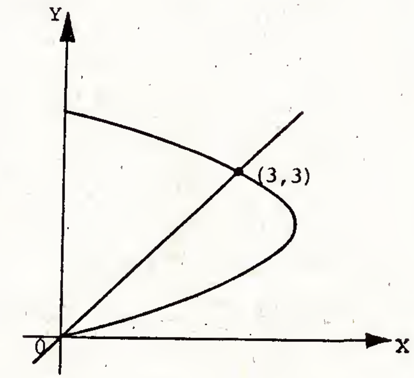
$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{16}{15} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{64}{21}$$

$$\rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{16}{15}, \frac{64}{21})$$

3.- $x = 4y - y^2$; $x = y$

Solución.

Sea C(h,k) el centro de gravedad



$dA = (4y - y^2 - y)dy$;

$h = \frac{1}{2}(4y - y^2 + y)$; $k = y$

$$\rightarrow A = \int_0^3 dA = \int_0^3 (3y - y^2)dy =$$

$$= \left[\frac{3}{2}y^2 - \frac{y^3}{3}\right]_0^3 = \frac{9}{2}$$

$\rightarrow$ $A = \frac{9}{2}$ .....(1)

Los momentos de superficie serán:

$$M_x = \int_0^3 k\,dA = \int_0^3 y(3y - y^2)dy = \left[y^3 - \frac{1}{4}y^4\right]_0^3 = \frac{27}{4}$$

$\rightarrow$ $M_x = \frac{27}{4}$ ... (2)

$$M_y = \frac{1}{2}\int_0^3 (5y - y^2)(3y - y^2)dy = \frac{1}{2}\int_0^3 (15y^2 - 8y^3 + y^4)dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left[5y^3 - 2y^4 + \frac{1}{5}y^5\right]_0^3$$

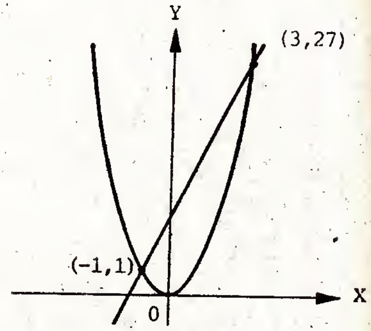
$M_y = \frac{54}{5}$ ...... (3)

$\rightarrow$ de (1), (2) y (3) se tiene:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{12}{5} \; ; \quad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{3}{2}$$

→ El centro de gravedad es: $(\bar{x},\bar{y}) = (\frac{12}{5}, \frac{3}{2})$

4.- $y = x^2$; $y = 2x + 3$,



Solución.

Sea C(h,k) el centro de gravedad

→ $dA = (2x + 3 - x^2)dx$

$h = x$

$k = \frac{1}{2} y = \frac{1}{2}(2x + 3 + x^2)$

$$\rightarrow A = \int_{-1}^{3} (2x + 3 - x^2)dx = \left[x^2 + 3x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{3}$$

$$A = \frac{32}{3} \quad .... \ (1)$$

Los momentos de superficie serán:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{3} (2x + 3 + x^2)(2x + 3 - x^2)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{3} (9 + 12x + 4x^2 - x^4)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[9x + 6x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{3}$$

$$M_x = \frac{544}{15} \quad .... \ (2)$$

$$M_y = \int_{-1}^{3} x(2x + 3 - x^2)dx = \int_{-1}^{3} (3x + 2x^2 - x^3)dx =$$

$$= \left[\frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{3}$$

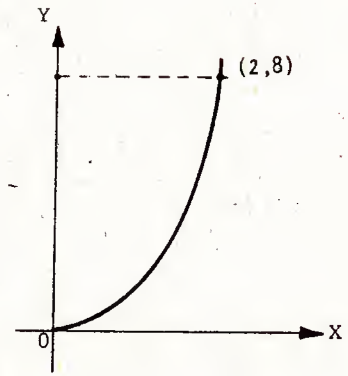
$$\rightarrow M_y = \frac{32}{3} \quad .... \ (3)$$

de (1), (2) y (3) se tiene finalmente que:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = 1 \; , \quad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{17}{5}$$

$$\therefore \ (\bar{x},\bar{y}) = (1, \frac{17}{5})$$

5.- $y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$



Solución.

Sea (h,k) el centro de gravedad

→ $dA = x\,dy$, $k = y$; $h = \frac{1}{2}x$

$$A = \int_0^8 y^{1/3}dy = \left[\frac{3}{4}y^{4/3}\right]_0^8 = 12$$

→ $A = 12$ ... (1)

Los momentos de superficie serán:

$$M_x = \int_0^8 k\,dA = \int_0^8 y\,x\,dy = \int_0^8 y^{4/3}dy$$

$$M_x = \frac{3}{7}y^{7/3}\Big]_0^8 = \frac{384}{7} \quad .... \ (2)$$

$$M_y = \int_0^8 h\,dA = \frac{1}{2}\int_0^8 x^2 dy = \frac{1}{2}\int_0^8 y^{2/3}dy = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{5}y^{5/3}\right]_0^8 = \frac{48}{5}$$

$$M_y = \frac{48}{5} \quad .... \ (3)$$

de (1), (2) y (3) se tiene finalmente

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{48/5}{12} = \frac{48}{60} = \frac{4}{5}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{384/7}{12} = \frac{384}{84} = \frac{32}{7}$$

$$\therefore \ (\bar{x},\bar{y}) = (\frac{4}{5}, \frac{32}{7})$$

6.- $y = 4x - x^2$; $y = 2x - 3$

Solución.

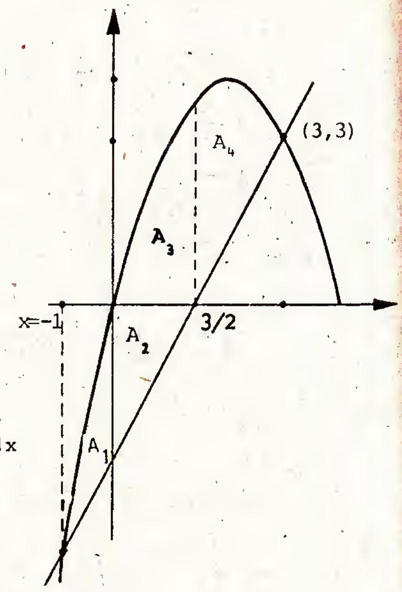
Cálculo de áreas de:

$$A_1 = -\int_0^{-1} (4x - x^2 - 2x + 3)\,dx$$

$$A_1 = -\int_0^{-1} (2x + 3 - x^2)\,dx$$

$$= \int_0^{-1} (x^2 - 2x - 3)\,dx$$

$$A_1 = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x\right]_0^{-1} = \frac{5}{3}$$



$$A_2 = \int_0^{3/2} (2x - 3)\,dx = -\int_{3/2}^{0} (2x - 3)\,dx$$

$$= \left[3x - x^2\right]_{3/2}^{0} = \frac{9}{4}$$

$$A_3 = \int_0^{3/2} (4x - x^2)\,dx = \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^{3/2} = \frac{27}{8}$$

$$A_4 = \int_{3/2}^{3} (4x - x^2 - 2x + 3)\,dx = \int_{3/2}^{3} (2x + 3 - x^2)\,dx =$$

$$= \left[x^2 + 3x - \frac{1}{3}x^3\right]_{3/2}^{3} = \frac{27}{8}$$

LOS CENTROS DE GRAVEDAD DE:

A_1 El centro del rectángulo genérico es:

$$\left[x , \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\right] = \left[x , \frac{1}{2}(x^2 + 6x + 3)\right]$$

$$\rightarrow M_x = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\,dA = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} (x^2 - 6x + 3)(2x + 3 - x^3)\,dx$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} (-x^4 + 8x^3 - 12x^2 - 12x + 9)\,dx =$$

$$= \left[-\frac{x^5}{5} + 2x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 9x\right]_{-1}^{0} = -\frac{22}{5}$$

$$M_y = \int_{-1}^{0} x(2x + 3 - x^2)\,dx = \left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{0} = -\frac{7}{12}$$

A_2 ; El centro del rectángulo genérico es:

$$\left[x, \frac{1}{2}(-2x + 3)\right]$$

$$\rightarrow M_x = \frac{1}{2}\int_0^{3/2} (-2x + 3)(2x - 3)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{3/2} (4x^2 - 9)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}x^3 - 9x\right]_0^{3/2} = -\frac{9}{4}$$

$$M_y = \int_0^{3/2} x(2x - 3)\,dx = \int_0^{3/2} (-2x^2 + 3x)\,dx =$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^{3/2} = \frac{9}{8}$$

A_3: El centro del rectángulo genérico es:

$$\left[x, \frac{1}{2}y_1\right] = \left[x, \frac{1}{2}(4x - x^2)\right]$$

$$\rightarrow M_x = \frac{1}{2}\int_0^{3/2} (4x - x^2)(4x - x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{3/2} (16x^2 - 8x^3 + x^4)\,dx =$$

$$M_x = \frac{1}{2}\left[\frac{16}{3}x^3 - 2x^4 + \frac{1}{5}x^5\right]_0^{3/2} = \frac{9 \times 167}{160} = \frac{1503}{160}$$

$$M_y = \int_0^{3/2} x(4x - x^2)\,dx = \int_0^{3/2} (4x^2 - x^3)\,dx =$$

$$= \left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^{3/2} = \frac{207}{64}$$

A_4: El centro del rectángulo genérico

$$\left[x, \frac{1}{2}(6x - 3 - x^2)\right]$$

$$\rightarrow \quad M_x = \frac{1}{2}\int_{3/2}^{3}(6x - 3 - x^2)(2x + 3 - x^2)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{3/2}^{3}(x^4 - 8x^3 + 18x^2 + 12x - 9)\,dx$$

$$\rightarrow \quad M_x = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}x^5 - 2x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 9x\right]_{3/2}^{3} = \frac{4563}{160}$$

$$M_y = \int_{3/2}^{3} x(2x + 3 - x^3)\,dx = \int_{3/2}^{3}(2x^2 + 3x - x^4)\,dx =$$

$$\left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5\right]_{3/2}^{3} = \frac{441}{64}$$

→ El cálculo de los centros de gravedad de cada área será

1.- $\bar{x}_1 = \frac{-7/12}{5/3} = -\frac{7}{20}$; $\quad \bar{y}_1 = \frac{-22/5}{5/3} = -\frac{66}{25}$

$\therefore \quad C_1 = (\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{-7}{20}, \frac{-66}{25})$

2.- $\bar{x}_2 = \frac{9/8}{9/4} = \frac{1}{2}$; $\quad \bar{y}_2 = \frac{-9/4}{9/4} = -1$

$\therefore \quad C_2 = (\bar{x}_2; \bar{y}_2) = (\frac{1}{2}, -1)$

3.- $\bar{x}_3 = \frac{207/64}{27/8} = \frac{23}{24}$; $\quad \bar{y}_3 = \frac{1503/160}{27/8} = \frac{167}{60}$

$\therefore \quad C_3 = (\bar{x}_3, \bar{y}_3) = (\frac{23}{24}, \frac{167}{60})$

4.- $\bar{x}_4 = \frac{441/64}{27/8} = \frac{49}{24}$; $\quad \bar{y}_4 = \frac{4563/160}{27/8} = \frac{169}{20}$

$\therefore \quad C_4 = (\bar{x}_4, \bar{y}_4) = (\frac{49}{24}, \frac{169}{20})$

finalmente aplicando el siguiente concepto.

$$\bar{x} = \frac{A_1\bar{x}_1 + A_2\bar{x}_2 + A_3\bar{x}_3 + A_4\bar{x}_4}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}$$

$$\bar{y} = \frac{A_1\bar{y}_1 + A_2\bar{y}_2 + A_3\bar{y}_3 + A_4\bar{y}_4}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}$$

se tiene:

$$\bar{x} = \frac{\frac{5}{3}\,x(-\frac{7}{20}) + (\frac{9}{4})\,x\,(\frac{1}{2}) + (\frac{27}{8})\,x\,(\frac{23}{24}) + \frac{27}{8}\,x\,\frac{49}{24}}{\frac{5}{3} + \frac{9}{4} + \frac{27}{8} + \frac{27}{8}} = 1$$

$$\bar{y} = \frac{(\frac{5}{3})\,x\,(-\frac{66}{25}) + (\frac{9}{4})\,x\,(-1) + (\frac{27}{8})\,x\,(\frac{167}{60}) + (\frac{169}{20})\,x\,(\frac{27}{8})}{\frac{5}{3} + \frac{9}{4} + \frac{54}{8}}$$

$= 2.93$

∴ El centro de gravedad general será:

$C = (\bar{x}, \bar{y}) = (1,\ 2.93)$

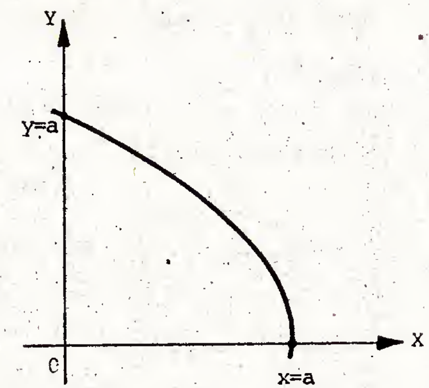
7.- $y^2 = a^2 - ax$; $\quad x = 0, \quad y = 0, \quad$ (primer cuadrante)

Solución.

Aquí: el centro de gravedad será (h, k)

donde:

$d\underline{A} = xdy; \quad h = y; \quad k = \frac{1}{2}x$



$$\rightarrow \quad A = \int_0^a \frac{(a^2 - y^2)}{a}\,dy =$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^a (a^2 - y^2)\,dy$$

$$A = \frac{1}{a}\left[a^2y - \frac{1}{3}y^3\right]_0^a$$

$$= \frac{2}{3}a^2$$

$$\rightarrow \quad M_x = \int_0^a y\left(\frac{a^2 - y^2}{a}\right)dy = \frac{1}{a}\int_0^a (a^2y - y^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{a}\left[\frac{a^2y^2}{2} - \frac{1}{4}y^4\right]_0^a = \frac{a^3}{4}$$

$$M_y = \frac{1}{2}\int_0^a \left(\frac{a^2 - y^2}{a}\right)^2 = \frac{1}{2a^2}\int_0^a (a^4 - 2a^2y^2 + y^4)dy =$$

$$= \frac{1}{2a^2}\left[a^4y - \frac{2}{3}a^2y^3 + \frac{1}{5}y^5\right]_0^a$$

$$M_y = \frac{4}{15}a^3$$

$$\rightarrow \bar{x} = \frac{2}{5}a \quad ; \quad \bar{y} = \frac{3}{8}a$$

$$\rightarrow C = (\bar{x},\bar{y}) = \left(\frac{2}{5}a,\ \frac{3}{8}a\right)$$

8.- Hallar el centro de gravedad de la superficie limitada por el lazo de la curva $y^2 = 4x^2 - x^3$

Solución.

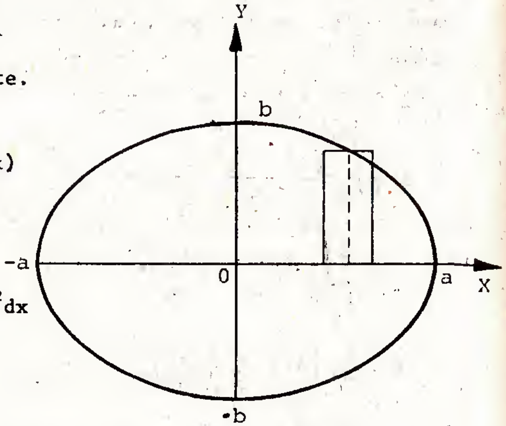
Sea el centro de gravedad $C(h,k)$

$dA = ydx$; $h = x$, $k = 0$

9.- Hallar el centro de gravedad de la parte de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que esta en el primer cuadrante.



Solución.

Sea el centro de gravedad (h,k)

$\rightarrow dA = ydx$; $h = x$; $K = \frac{1}{2}y$

$$\rightarrow A = \int_0^a dA = \int_0^a \frac{b}{a}(a^2 - x^2)^{1/2}dx$$

haciendo la sustitución:

$$x = a\,\text{sen}\,\theta \rightarrow dx = a\cos\theta\, d\theta \ ; \quad \begin{cases} x = a, \ \theta = \pi/2 \\ x = 0, \ \theta = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow A = \frac{b}{a}\int_0^{\pi/2}(a^2 - a^2\text{sen}^2\theta)^{1/2} = \frac{b}{a}\int_0^{\pi/2} a^2\cos^2\theta\, d\theta$$

$$A = \frac{ab}{2}\int_0^{\pi/2}(1 + \cos 2\theta)d\theta = \frac{ab}{2}\left[\theta + \frac{\text{sen}\ 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{ab\pi}{4}$$

$$\rightarrow A = \frac{ab\pi}{4} \ \ldots\ldots\ (1)$$

los momentos de superficie serán:

$$M_x = \frac{b^2}{2a^2}\int_0^a (a^2 - x^2)^{1/2}(a^2 - x^2)^{1/2}dx = \frac{b^2}{2a^2}\int_0^a (a^2 - x^2)dx =$$

$$= \frac{b^2}{2a^2}\left[a^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^a$$

$$M_x = \frac{ab^2}{3} \ \ldots\ (2)$$

$$M_y = \frac{b}{a}\int_0^a x(a^2 - x^2)^{1/2}dx = \left[-\frac{b}{3a}(a^2 - x^2)^{3/2}\right]_0^a = \frac{a^2b}{3}$$

$$\rightarrow M_y = \frac{a^2b}{3} \ \ldots\ (3)$$

de (1), (2) y (3) obtenemos los centros de gravedad.

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{4a}{3\pi} \ ; \quad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{4b}{3\pi}$$

$$\rightarrow C(\bar{x},\bar{y}) = \left(\frac{4a}{3\pi},\ \frac{4b}{3\pi}\right)$$

10. Hallar el centro de gravedad de la superficie limitada por la cisoide $y^2(2a - x) = x^3$ y su asíntota $x = 2a$

Solución.

Sea el centro de gravedad $C(h,k)$

$\rightarrow dA = ydx$; $h = x$, $k = 0$

$$A = \int_0^{2a}\frac{x^{3/2}}{(2a - x)^{1/2}}dx = \int_0^{2a} x\left(\frac{x}{2a - x}\right)^{1/2}dx$$

$$\rightarrow A = \int_0^4 \sqrt{4x^2 - x^3}\,dx = \int_0^4 x\sqrt{4 - x}\,dx$$

Haciendo la sustitución.

$u^2 = 4 - x \rightarrow x = 4 - u^2$

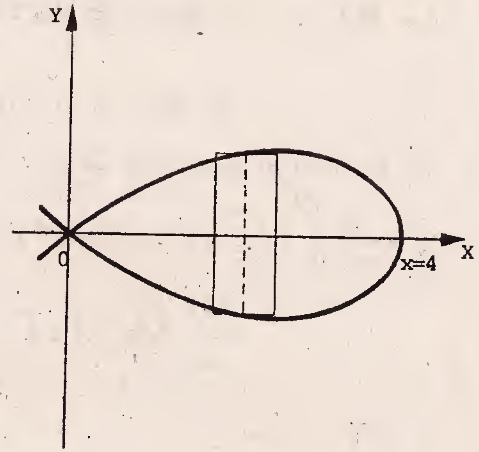
$\rightarrow dx = -2udu$

en la integral se tiene:

$$A = \int_0^4 (4 - u^2)(-2u^2)du$$

$$= \int_0^4 (2u^4 - 8u^2)du$$

$$= \left[\frac{2}{5}u^5 - \frac{8}{3}u^3\right]_0^4$$



pero $u = (4 - x)^{1/2} \rightarrow$

$$A = \left[\frac{2}{5}(4 - x)^{5/2} - \frac{8}{3}(4 - x)^{3/2}\right]_0^4 = \frac{128}{15}$$

$\rightarrow A = \frac{128}{15}$

Los centros de gravedad serán:

$$M_x = \int_0^4 0 dA = 0$$

$$M_y = \int_0^4 x(4x^2 - x^3)^{1/2}dx = \int_0^4 x^2(4 - x)^{1/2}dx$$

Haciendo la sustitución:

$u^2 = 4 - x \rightarrow x = 4 - u^2 \rightarrow dx = -2udu$

en la integral se tiene:

$$M_y = \int_0^4 (4 - u^2)^2(-2u^2)du = \int_0^4 (-32u^2 + 16u^4 - 2u^6)du =$$

$$M_y = \left[-\frac{32}{3}u^3 + \frac{16}{5}u^5 - \frac{2}{7}u^7\right]_0^4$$

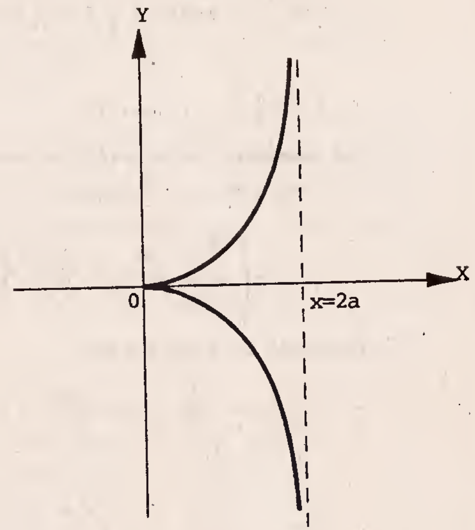
Pero: $u = (4 - x)^{1/2}$

$$\rightarrow M_y = \left[-\frac{32}{3}(4 - x)^{3/2} + \frac{16}{5}(4 - x)^{5/2} - \frac{2}{7}(4 - x)^{7/2}\right]_0^4$$

$$M_y = \frac{2048}{105}$$

$$\rightarrow \bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{16}{7} \; ; \; \bar{y} = 0$$

$$\therefore C = (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{16}{7}, 0\right)$$



Haciendo la sustitución:

$$z^2 = \frac{x}{2a - x}, \; x = \frac{2az^2}{z^2 + 1};$$

$$dx = \frac{4az}{(z^2 + 1)^2}$$

y donde $\begin{cases} x = 2a \; ; \; z = \infty \\ x = 0 \; ; \; z = 0 \end{cases}$

en la integral se tiene:

$$A = \int_0^\infty \left(\frac{2az^2}{z^2 + 1}\right)(z)\left(\frac{4az}{(z^2 + 1)^2}\right)dz = 8a^2\int_0^\infty \frac{z^4 dz}{(z^2 + 1)^3}$$

nuevamente haciendo la sustitución:

$z = tg\theta \rightarrow dz = sec^2\theta \, d\theta$ donde $\begin{cases} z = \infty, \; \theta = \pi/2 \\ z = 0, \; \theta = 0 \end{cases}$

en la integral se tiene:

$$A = 8a^2\int_0^{\pi/2} \frac{tg^4\theta sec^2\theta d\theta}{sec^6\theta} = 8a^2\int_0^{\pi/2} sen^4\theta d\theta = 8a^2\int_0^{\pi/2} \frac{(1 - \cos 2\theta)^2}{4} d\theta$$

$$A = 2a^2\int_0^{\pi/2} (1 - 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta)d\theta = 2a^2\left\{\int_0^{\pi/2} d\theta - \int_0^{\pi/2} \cos 2\theta d(2\theta) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta + \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} \cos 4\theta \, d(4\theta)\right\}$$

$$A = 2a^2\left[\theta - \operatorname{sen}2\theta + \frac{1}{2}\,\theta + \frac{1}{8}\operatorname{sen}4\theta\right]_0^{\pi}$$

$$\rightarrow\ A = \frac{3a^2\pi}{2} \quad \ldots\ldots\ (1)$$

Los momentos de superficie serán:

$$M_x = 0 \quad \ldots\ldots\ (2)$$

$$M_y = \int_0^{2a} \frac{x^{5/2}}{(2a-x)^{1/2}}\,dx = \int_0^{2a} x^2\left(\frac{x}{2a-x}\right)^{1/2} dx$$

haciendo la sustitución:

$$z^2 = \frac{x}{2a-x} \rightarrow x = \frac{2az^2}{z^2+1}\ ;\quad dx = \frac{4az}{(z^2+1)^2}\ ;$$

$$\begin{cases} x = 2a\ , & z = \infty \\ x = 0\ , & z = 0 \end{cases}$$

en la integral se tiene:

$$M_y = 16a^3\int_0^{\infty} \frac{z^6}{(z^2+1)^4} =$$

Haciendo la sustitución:

$$z = \operatorname{tg}\theta\ ;\quad dz = \sec^2\theta\, d\theta\ ;\quad \begin{cases} z = \infty\ ,\ \theta = \pi/2 \\ z = 0\ ,\ \theta = 0 \end{cases}$$

en la integral se tiene:

$$M_y = 16a^3\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{tg}^6\theta\sec^2\theta\, d\theta}{\sec^8\theta} = 16a^3\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^6\theta\, d\theta$$

$$\rightarrow M_y = 2a^3\left[\frac{5}{2}\,\theta - \frac{3}{2}\operatorname{sen}2\theta + \frac{3}{8}\operatorname{sen}4\theta - \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta + \frac{1}{6}\operatorname{sen}^3 2\theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$M_y = \frac{5a^3\pi}{2} \quad \ldots.\ (3)$$

Los centros de gravedad serán:

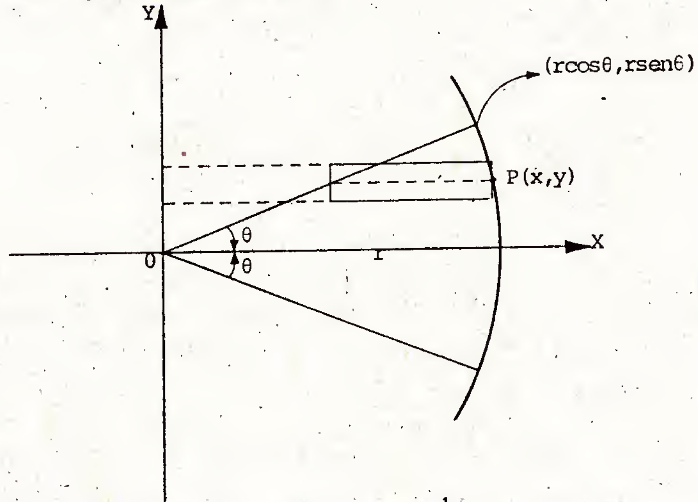
$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{5a}{3}\ ,\quad \bar{y} = 0$$

$$\rightarrow\ C = (\bar{x},\bar{y}) = \left(\frac{5}{3}\,a,\ 0\right)$$

11. Hallar la distancia del centro del círculo al centro de gravedad de un sector circular de radio r y ángulo 2θ.

Solución.

En nuestro gráfico hemos situado el sector de tal manera que su centro geométrico está sobre el eje x por simetría, la abscisa de este centro será igual a la del área que se halla encima del eje x, y que limita por $x^2 + y^2 = r^2$ y la recta $y = x\,\operatorname{tg}\theta$



$$\longrightarrow\ dA = (\sqrt{r^2-y^2} - y\,\operatorname{ctg}\theta)dy\ ;\quad K = 0,\quad h = \frac{1}{2}\,x$$

$\longrightarrow$ el área será:

$$A = \int_0^{r\operatorname{sen}\theta} (\sqrt{r^2-y^2} - y\,\operatorname{ctg}\theta)d\theta = \int_0^{r\operatorname{sen}\theta} \sqrt{r^2-y^2}\,dy - \operatorname{ctg}\theta\int_0^{r\operatorname{sen}\theta} ydy$$

$$A = \left[\frac{1}{2}\,y\sqrt{r^2-y^2} + \frac{1}{2}\,r^2\arcsen\frac{y}{r} - \frac{1}{2}\,y^2\operatorname{ctg}\theta\right]_0^{r\operatorname{sen}\theta}$$

$$A = \frac{1}{2}\,r^2\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

Los momentos de superficie serán:

$$M_x = \int_0^{r\operatorname{sen}\theta} 0dA = 0 \quad \ldots.\ (2)$$

$$M_y = \frac{1}{2}\int_0^{rsen\theta} (\sqrt{r^2 - y^2} + y\ ctg\theta)(\sqrt{r^2 - y^2} - y\ ctg\theta)d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{rsen\theta} (r^2 - y^2 - y^2 ctg^2\theta)dy$$

$$M_y = \frac{1}{2}\left[r^2 y - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{3}y^3 ctg^2\theta\right]_0^{rsen\theta}$$

$$\rightarrow\ M_y = \frac{1}{3}r^3 sen\theta \quad ..... (3)$$

de (1), (2) y (3) se tiene:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{2rsen\theta}{3\theta}\ ;\ \bar{y} = 0 \quad \therefore\ C(\frac{25\ sen\theta}{3\theta}, 0)$$

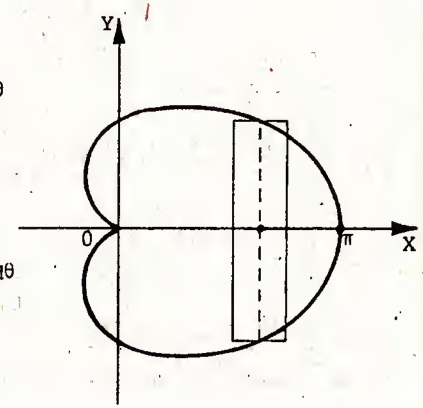
Luego, la distancia del centro del círculo al centro de gravedad del sector circular es:

$$\text{distancia} = \frac{2rsen\theta}{3\theta}$$

12. Hallar el centro de gravedad de la superficie limitada por la cardioide

$$P = a(1 + \cos\theta)$$

Solución.



$$\rightarrow\ A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \rho^2 d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi} (1 + \cos\theta)^2 d\theta$$

$$A = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)d\theta$$

$$A = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi} (1 + 2\cos\theta + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta)d\theta$$

$$A = \frac{a^2}{2}\left[\theta + 2sen\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}sen2\theta\right]_0^{\pi}$$

$$A = \frac{3a^2\pi}{4}$$

Los centros de gravedad aerán:

$$A\bar{x} = \frac{1}{3}\int_0^{\pi} \rho^3\cos\theta d\theta = \frac{1}{3}a^3\int_0^{\pi} (1 + \cos\theta)^3\cos\theta d\theta$$

$$\frac{3a^2\pi}{4}\bar{x} = \frac{1}{3}a^3\int_0^{\pi} (\cos\theta + 3\cos^2\theta + 3\cos^3\theta + \cos^4\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{3}a^3\int_0^{\pi} (\frac{15}{8} + \cos\theta + \frac{3}{2}\cos 2\theta + 3\cos\theta + 3aen^2\theta\cos\theta +$$

$$+ \frac{1}{2}\,coa2\theta + \frac{1}{8}\cos 4\theta)d\theta$$

$$\frac{1}{3}a^3\left[\frac{15}{8}\theta + aen\theta + \frac{3}{4}aen2\theta + 3sen\theta + sen^3\theta + \frac{1}{4}sen2\theta + \frac{1}{24}aen4\theta\right]_0^{\pi}$$

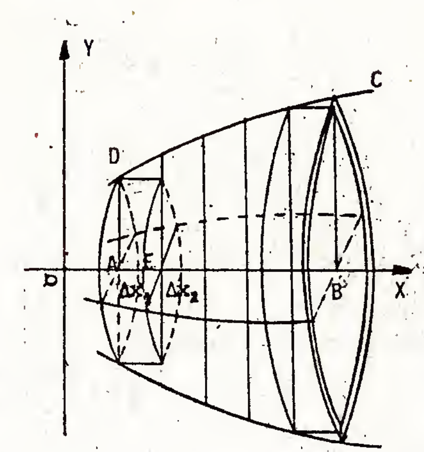
$$\frac{3\pi a^2}{4}\bar{x} = \frac{15}{24}a^3\pi \ \rightarrow\ \bar{k} = \frac{5}{6}a$$

El eje de simetría de la fig. es el eje x, entonces la ordenada del centro de gravedad es $\bar{y} = 0$

$$\rightarrow\ C = (\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{5}{6}a, 0)$$

CENTRO DE GRAVEDAD DE UN SOLIDO DE REVOLUCION

El centro de gravedad mecánico de un sólido homogéneo coincide con el centro de gravedad geomé trico de ese cuerpo si el sólido posee un plano de simetría al centro de gravedad estará en ese plano.



(I) El momento de cilindro con respecto al plano que pasa por OY perpendicular a OX es:

$$dM_y = xdV = \pi xy^2\Delta x$$

II. EL MOMENTO DEL SOLIDO: es:

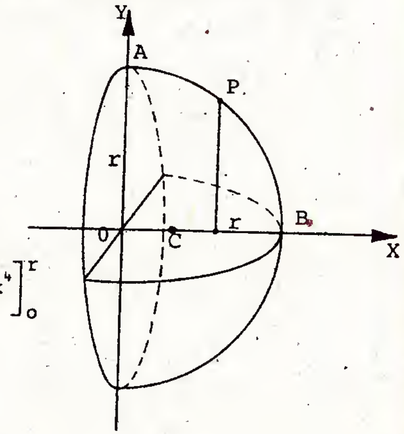
$$V\bar{x} = M_y = \int_0^r \pi x y^2 dx$$

PROBLEMAS:

Hallar el centro de gravedad para c/u de los siguientes sólidos.

1. Hemisferio:

Solución.



La ecuación de la generatríz APB es:

$$x^2 + y^2 = r^2 \rightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\rightarrow M_y = \int_0^r \pi x y^2 dx = \pi \int_0^r x(r^2 - x^2)dx$$

$$M_y = \pi \int_0^r (r^2 x - x^3)dx = \pi \left[\frac{r^2 x^2}{2} - \frac{1}{4}x^4\right]_0^r$$

$$M_y = \frac{\pi r^4}{4} \quad \dots . (1)$$

$$V = \int_0^r dV = \int_0^r \pi y^2 dx = \pi \int_0^r (r^2 - x^2)dx = \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^r$$

$$\rightarrow V = \frac{2\pi r^3}{3} \quad \dots\dots (2)$$

de (1) y (2) se tiene que

$$\bar{x} = \frac{M_y}{V} = \frac{\pi r^4/4}{\frac{2\pi r^3}{3}} = \frac{3}{8}r$$

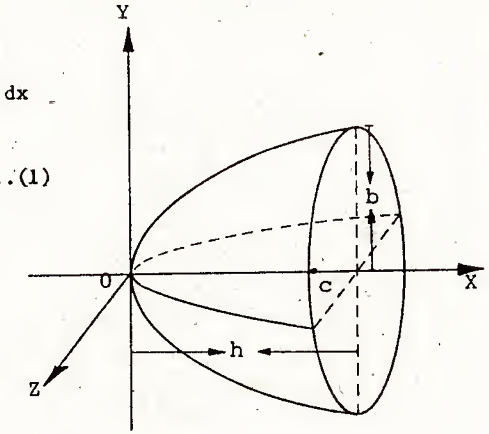
$$\rightarrow \bar{x} = \frac{3}{8}r$$

2.- Paraboloide de revolución.

Solución.

Sea la ecuación generatríz:

$$(x - h)^2 + y^2 = h^2 \rightarrow y = \sqrt{h^2 - (x-h)^2}$$



$$M_y = \int_0^h \pi x\left[h^2 - (x - h)^2\right]dx$$

$$M_y = \pi \int_0^h (h^2 x - x^3 + 2x^2 h - xh^2)dx$$

$$M_y = \pi \left[\frac{2}{3}x^3 h - \frac{1}{4}x^4\right]_0^h = \frac{5}{12}\pi h^4 \quad \dots (1)$$

$$V = \frac{5}{8}\pi h^2 \quad \dots\dots (2)$$

de (1) y (2) se tiene que:

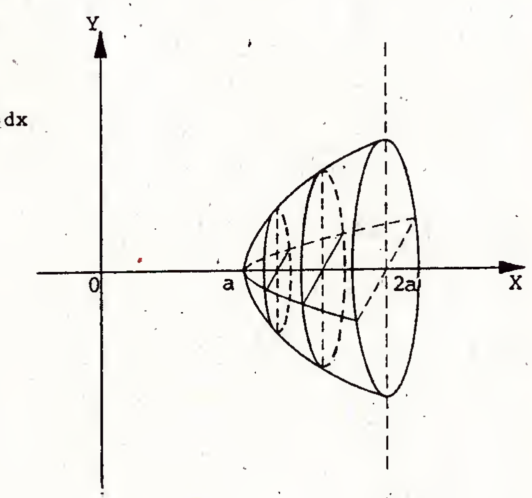
$$\bar{x} = \frac{M_y}{V} = \frac{\frac{5}{12}\pi h^4}{\frac{5}{8}\pi h^3} = \frac{2}{3}h$$

$$\rightarrow \bar{x} = \frac{2}{3}h$$

El área limitada por Ox y cada una de las curvas siguientes gira alrededor de Ox, Hallar el centro de gravedad del sólido de revolución que se engendra:

3.- $x^2 - y^2 = a^2$; $x = 2a$

Solución.



El momento de cilindro será:

$$M_y = \int_a^{2a} \pi x y^2 dx = \pi \int_a^{2a} x(x^2 - a^2)dx$$

$$M_y = \pi \int_a^{2a} (x^3 - a^2 x)dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}a^2 x^2\right]_a^{2a}$$

$$= \frac{9}{4}\pi a^4$$

$$\rightarrow M_y = \frac{9}{4}\pi a^4$$

El volumen será:

$$V = \int dV = \pi\int_a^{2a} (x^2 - a^2)dx = \pi\left[\frac{1}{3}x^3 - a^2x\right]_a^{2a} = \frac{4}{3}\ \pi a^3$$

$$\rightarrow\ \bar{x} = \frac{M_y}{V} = \frac{\frac{9}{4}\pi a^4}{\frac{4}{3}\ \pi a^3} = \frac{27}{16}\ a \qquad ; \quad \rightarrow\ \bar{x} = \frac{27}{16}\ a$$

4.- $ay = x^2$, $x = a$

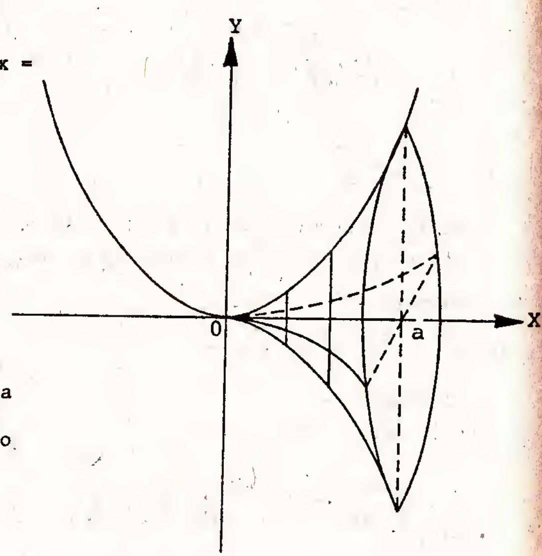
Solución.

El momento de cilindro será:

$$M_y = \pi\int_0^a x\ y^2dx = \frac{\pi}{a^2}\int_0^a x^5dx =$$

$$= \frac{\pi}{a^2}\left[\frac{1}{6}\ x^6\right]_0^a$$

$$M_y = \frac{1}{6}\ \pi a^4 \qquad \ldots\ldots\ (1)$$



El volumen será:

$$V = \frac{\pi}{a^2}\int_0^a x^4dx = \frac{\pi}{a^2}\left[\frac{1}{5}\ x^5\right]_0^a$$

$$V = \frac{1}{5}\ \pi a^3 \qquad \ldots\ (2)$$

de (1) y (2) se tiene que: $\quad \bar{x} = \frac{M_y}{V} = \frac{\frac{1}{6}\ \pi a^4}{\frac{1}{5}\ \pi a^3} = \frac{5}{6}\ a$

$$\rightarrow\ \bar{x} = \frac{5}{6}\ a$$

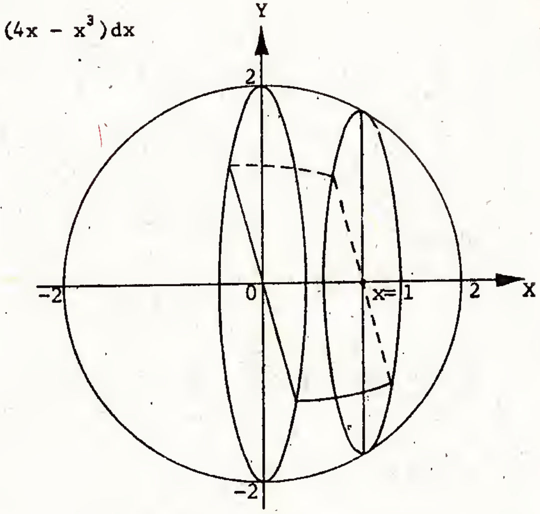
5.- $x^2 + y^2 = 4$, $x = 0$, $x = 1$

Solución.

Momento de cilindro será:

$$M_y = \pi\int_0^1 x(4 - x^2)dx = \pi\int_0^1 (4x - x^3)dx$$

$$M_y = \pi\left[2x^2 - \frac{1}{4}\ x^4\right]_0^1 = \frac{7}{4}\ \pi$$



El volumen será:

$$V = \pi\int_0^1 (4 - x^2)dx =$$

$$= \pi\left[4x - \frac{1}{3}\ x^3\right]_0^1 = \frac{11}{3}\ \pi$$

$$\rightarrow\ V = \frac{11}{3}\ \pi$$

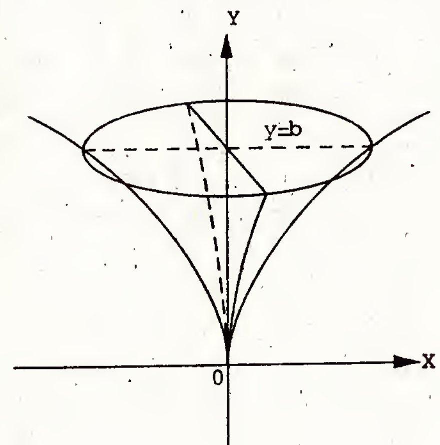
$$\therefore\ \bar{x} = \frac{M_y}{V} = \frac{\frac{7}{4}\ \pi}{\frac{11\pi}{3}} = \frac{21}{44} \qquad ; \quad \rightarrow\ \bar{x} = \frac{21}{44}$$

La superficie limitada por Oy y cada uno de las curvas siguientes gira alrededor de Oy. Hallar el centro de gravedad del sólido de revolución que se engendra.

6.- $y^2 = 4ax$, $y = b$

Solución.

$$M_x = \pi\int_0^b yx^2dy = \frac{\pi}{16a^2}\int_0^b y^5dy =$$



$$= \left[\frac{\pi y^6}{96a^2}\right]_0^b$$

$$M_x = \frac{\pi b^6}{96a^2} \qquad \ldots\ (I)$$

$$V = \pi\int_0^b x^2dy = \frac{\pi}{16a^2}\int_0^b y^4dy = \left.\frac{\pi y^5}{80a^2}\right]_0^b$$

$$\rightarrow \quad V = \frac{\pi b^5}{80a^2}$$

$$\rightarrow \quad \bar{y} = \frac{M_x}{V} = \frac{\pi b^6/96a^2}{\pi b^5/80a^2} = \frac{5}{6}\, b \quad \rightarrow \quad \bar{y} = \frac{5}{6}\, b$$

7.- $x^2 - y^2 = 1, \quad y = 0, \quad y = 1$

Solución.

$$M_x = \pi \int_0^1 y(1 + y^2)dy = \pi \int_0^1 (y + y^3)dy$$

$$M_x = \pi \left[\frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{4} y^4\right]_0^1 = \frac{3}{4}\pi$$

$$M_x = \frac{3}{4}\pi \quad \ldots\ldots (1)$$

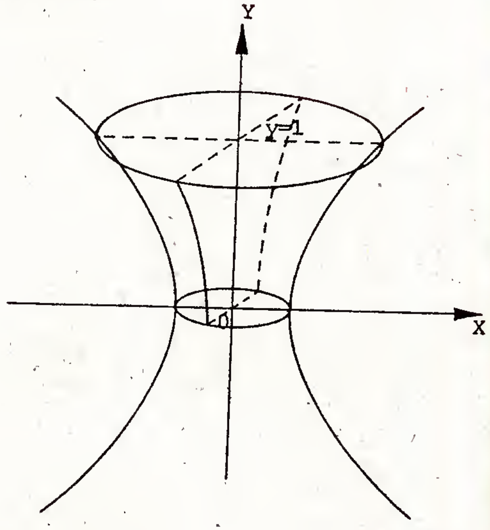
El volumen será:

$$V = \pi \int_0^1 (1 + y^2)dy =$$

$$= \pi\left[y + \frac{1}{3} y^3\right]_0^1 = \frac{4}{3}\pi$$

$$\therefore \quad \bar{y} = \frac{M_x}{V} = \frac{\frac{3}{4}\pi}{\frac{4}{3}\pi} = \frac{9}{16}$$

$$\rightarrow \quad \bar{y} = \frac{9}{16}$$



ECUACIONES DIFERENCIALES DE 1º ORDEN Y DE PRIMER GRADO

Una ecuación de primer orden y de primer grado sa puede escribir en la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

donde: M,N son funciones de x,y de las ecuaciones diferenciales que pertenecen a esta clase las mas comunes pueden dividirse en cuatro tipos a saber

I. ECUACIONES CON VARIABLES SEPARABLES:

Son las ecuaciones diferenciales cuyos términos se pueden disponerse de la forma:

$$f(x)dx + F(y)dy = 0 \qquad (1)$$

donde $f(x)$ es una función de x unicamente, $F(y)$ una función de y unicamente este procedimiento se llama separación de variable y su solución se obtiene por integración directa.

$$\int f(x)dx + \int F(y)dy = C, \quad c, \text{ constante} \quad \ldots \quad (2)$$

REGLA:

1º PASO: Quitar denominadores; si la ecuación contiene derivadas, se multiplican todo los términos por la diferencial de la variable independiente.

2º PASO: Se sacan las diferenciales como factor común, si entonces la ecuación toma forma:

$$xydx + x'y'dy = 0$$

en donde x,x' son funciones de x unicamente y Y, Y' son funciones de y únicamente, puede reducirse a la forma (1) dividiendo todo los términos por X'Y

3º PASO. se integra cada parte separadamente, como en (2)

II. ECUACIONES HOMOGENEAS:

Se dice que la ecuación diferencial:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Es homogénea cuando M,N, son funciones homogéneas de x,y del mismo grado: es decir que verifican la siguiente identidad:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$$

y se resuelven haciendo la sustitución $y = ux$, esto mas dará una ecuación diferencial en u y x en la que las variables son separable y se procede a resolver de acuerdo a las reglas del tipo I.

PROBLEMAS:

Hallar la solución general de c/u de las siguientes ecuaciones diferenciales

1) $(2 + y)dx - (3 - x)dy = 0$

Solución.

A fin de separar las variables dividimos por $(2 + y)(3 - x)$

$$\rightarrow = \frac{dx}{3 - x} - \frac{dy}{2 + y} = 0$$

finalmente integrando se tiene:

$$\int \frac{dx}{3 - x} - \int \frac{dy}{2 + y} = C \equiv -\int \frac{d(3 - x)}{3 - x} - \int \frac{dx}{2 + y} = C$$

$$- \ln(3 - x) - \ln(2 + y) = \ln C$$

$$= - \ln(3 - x)(2 + y) = \ln C = \ln(3 - x)(2 + y) = \ln C$$

tomando exponencial a ambos miembros se tiene:

$$= \ln e^{(3-x)(2+y)} = \ln e^C = (3 - x)(2 + y)\ln e = C\ln e$$

$$= (3 - x)(2 + y) = C \text{ (por ser } \ln e = 1)$$

2) $x(x + 3)dy - y(2x + 3)dx = 0$

Solución.

a fin de separar las variables dividimos por: $yx(x + 3)$

$$= \frac{dy}{y} - (\frac{2x + 3}{x(x+3)})dx = 0$$

Tomando integrales se tiene:

$$= \int \frac{dy}{y} - \int \frac{(2x + 3)dx}{x(x + 3)} = C$$

$$= \int \frac{dy}{y} - \int \frac{d(2x + 3)}{x^2 + 3x} = C$$

$$= \ln y = \ln(x)(x + 3) = \ln C$$

$$= \ln y = \ln x(x + 3) + \ln C = \ln x(x + 3)C$$

$$= \ln y = \ln cx\,(x + 3)$$

tomando la exponencial a ambos miembros se tiene:

$$y = Cx(x + 3)$$

3.- $\sqrt{1 + x^2}\, dy - \sqrt{1 - y^2}\, dx = 0$

Solución.

para separar variable dividimos por $(\sqrt{1 + x^2})(\sqrt{1 - y^2})$:

$$= \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} - \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = 0$$

integrando se tiene:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} - \int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \operatorname{arcsen} y - \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) = \ln C$$

$$= \operatorname{arcsen} y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + \ln C = \ln C(x + \sqrt{1 + x^2})$$

$$= \operatorname{arcsen} y = \ln C(x + \sqrt{1 + x^2})$$

4.- $(1 - x)dy - y^2dx = 0$

Solución.

Separando variable se tiene: (dividir por: $(1 - x)y^2$:)

$$\frac{dy}{y^2} - \frac{dx}{1 - x} = 0$$

integrando se tiene:

$$\int \frac{dy}{y^2} - \int \frac{dx}{1-x} = \int \frac{dy}{y^2} + \int \frac{d(1-x)}{1-x} = C$$

$$= -\frac{1}{y} + Ln(1-x) = LnC$$

$$= \frac{1}{y} = Ln(1-x) + LnC = LnC(1-x)$$

$$1 = y\ LnC(1-x)$$

5.- $(x + 2y)\,dx + (2x - 3y)dy = 0$

Solución.

Aquí $M(x,y) = x + 2y \rightarrow M(\lambda x,\lambda y) = \lambda(x + 2y)$

$N(x,y) = 2x - 3y \rightarrow N(\lambda x,\lambda y) = \lambda(2x - 3y)$

$\therefore$ $M(x,y)$, $N(x,y)$ son homogéneas de grado $1 \rightarrow$

hacemos la sustitución $y = ux \rightarrow dy = udx + xdu$ en la ecuación se tiene

$$(x + 2ux)dx + (2x - 3ux)(udx + xdu) = 0$$

$$= x(1 + 4u - 3u^2)dx + x^2(2 - 3u)du = 0$$

A fin de separar la variable dividimos por: $x^2(1 + 4u - 3u^2)$

$$= \frac{dx}{x} + \frac{(2-3u)du}{1+4u-3u^2} = 0$$

integrando se tiene:

$$= \int \frac{dx}{x} + \int \frac{(2-3u)du}{1+4u-3u^2} = C$$

Haciendo el cambio de variable en el 2do miembro:

$$V = 1 + 4u - 3u^2 \rightarrow \frac{du}{2} = (2-3u)du$$

$$\rightarrow \quad = \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{dV}{V} = C$$

$= Lnx + \frac{1}{2}LnV = LnC$, pero: $V = 1 + 4u = 3u^2$

$\rightarrow$

$$= 2Lnx + Ln(1 + 4u - 3u^2) = 2\ LnC$$

$$= Lnx^2(1 + 4u - 3u^2) = LnC^2$$

$$= x^2(1 + 4u - 3u^2) = C$$

Pero: $U = \frac{y}{x}$

$\rightarrow$

$$= x^2\left(1 + 4\frac{y}{x} - 3\frac{y^2}{x^2}\right) = x^2 + 4xy - 3y^2 = C$$

6.- $(3x + 5y)dx + (4x + 6y)dy = 0$

Solución.

$M(x,y) = 3x + 5y \rightarrow M(\lambda x,\lambda y) = \lambda(3x + 5y)$

$N(x,y) = 4x + 6y \rightarrow N(\lambda x,\lambda y) = \lambda(4x + 6y)$

$\therefore$ $M(x,y)$, $N(x,y)$ son homogéneas y de grado 1

$\rightarrow$ hacemos la sustitución

$y = ux$, $\rightarrow dy = udx + xdu$ en la ecuación se tiene:

$$= (3x + 5ux)dx + (4x + 6ux)(udx + xdu) = 0$$

$$= x(3 + 9u + 6u^2)dx + x^2(4 + 6u)du = 0$$

A fin de separar las variables dividimos por:

$$x^2(3 + 9u + 6u^2)$$

$$= \frac{dx}{x} + \frac{(4+6u)du}{3 + 9u + 6u^2} = 0$$

integrando se tiene:

$$= \int \frac{dx}{x} + \int \frac{(4+6u)du}{6u^2 + 9u + 3} = \int \frac{dx}{x} = \int \frac{(6u+4)du}{(6u+3)(u+1)} = C$$

del 2do miembro se tiene:

$$\frac{6u + 4}{(6u + 3)(u + 1)} = \frac{A}{6u + 3} + \frac{B}{u + 1} = A(u + 1) + B(6u + 3) =$$

$$= (A + 6B)u + A + 3B$$

igualando los coeficientes de la misma potencia de u se tiene:

$$\begin{matrix} A + 6B = 6 \\ A + 3B = 4 \end{matrix} \rightarrow A = 2, \quad B = \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{(6u + 4)du}{(6u + 3)(u + 1)} = \int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{du}{6u + 3} + \frac{2}{3}\int \frac{du}{u + 1} = C$$

$$= \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{3}\int \frac{d(6u + 3)}{6u + 3} + \frac{2}{3}\int \frac{du}{u + 1} = Lnx + \frac{1}{3} Ln(6u + 3) +$$

$$+ \frac{2}{3} Ln(u + 1) = LnC$$

$$= Lnx^3(6u + 3)(u + 1)^2 = LnC^3$$

tomando exponenciales a ambos miembros:

$$= x^3(6u + 3)(u + 1)^2 = C$$

pero $\quad u = \frac{y}{x}$

$$\rightarrow \quad = x^3(6\frac{y}{x} + 3)(\frac{y}{x} + 1)^2 = (6y + 3x)(y + x)^2 = C$$

7.- $(8y + 10x)dx + (5y + 7x)dy = 0$

Solución.

$M(x,y) = 8y + 10x \rightarrow M(\lambda x,\lambda y) = \lambda(8y + 10x)$

$N(x,y) = 5y + 7x \rightarrow N(\lambda x,\lambda y) = \lambda(5y + 7x)$

$\therefore$ $M(x,y)$, $N(x,y)$ son homogéneas de 1º grado

$\rightarrow$ hacemos la sustitución:

$y = ux, \rightarrow dy = udx + xdu$ en la ecuación se tiene:

$$(8ux + 10x)dx + (5ux - 7x)(udx + xdu) = x(5u^2 + 15u + 10)dx +$$

$$+ x^2(5u + 7)du = 0$$, para separar variables dividimos por:

$$x^2(5u^2 + 15u + 10):$$

$$= \int \frac{dx}{x} + \int \frac{(5u + 7)du}{5u^2 + 15u + 10} = 0$$

integrando se tiene:

$$= \int \frac{dx}{x} + \int \frac{(5u + 7)du}{5u^2 + 15u + 10} = \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{5}\int \frac{(5u + 7)du}{(u + 2)(u+1)}$$

$$= \int \frac{dx}{x} + \frac{3}{5}\int \frac{du}{u + 2} + \frac{2}{5}\int \frac{du}{u + 1} = Lnx + \frac{3}{5} Ln(u + 2) + \frac{2}{5} Ln(u + 1) = LnC$$

$$= Lnx^5(u + 2)^3(u + 1)^2 = LnC^5$$

tomando exponenciales a ambos miembros:

$$= x^5(u + 2)^3(u + 1)^2 = C$$

pero: $\quad u = \frac{y}{x} \rightarrow$

$$= x^5(y/x + 2)^3(y/x + 1)^2 = C$$

$$= (y + 2x)^3(y + x)^2 = C$$

8.- $2z(3z + 1)dw + (1 - 2w)dz = 0$

Solución.

para separar variable dividimos por: $z(3z + 1)(1 - 2w)$

$$= \frac{2dw}{1 - 2w} + \frac{dz}{z(3z + 1)} = 0$$

integrando se tiene:

$$= -2\int \frac{dw}{2w - 1} + \int \frac{dz}{z(3z + 1)} = -\int \frac{d(2w - 1)}{2w - 1} + \frac{1}{3}\int \frac{dz}{z^2 + \frac{1}{3}z} = C$$

Completando cuadrado al segundo término se tiene:

$$- \int \frac{d(2w-1)}{2w-1} + 12\int \frac{dz}{(6z+1)^2-1} = -\int \frac{d(2w-1)}{2w-1} + 2\int \frac{d(6z+1)}{(6z+1)^2-1}$$

$$= -\ln(2w-1) + \ln\left(\frac{6z+1-1}{6z+1+1}\right) = \ln C$$

$$= -\ln(2w-1) + \ln\left(\frac{3z}{3z+1}\right) = -\ln(2w-1) - \ln\left(\frac{1}{3z}\right) - \ln(3z+1) = \ln C$$

$$= -\ln\left[\frac{(2w-1)(3z+1)}{3z}\right] = \ln C \equiv \ln\left[\frac{(2w-1)(3z+1)}{3z}\right] = \ln C$$

tomando exponenciales se tiene:

$$\frac{(2w-1)(3z+1)}{3z} = C \equiv (2w-1)(3z+1) = 3zC$$

9.- $2xdz - 2zdx = \sqrt{x^2+4z^2}\,dx$

Solución.

$$-(2z+\sqrt{x^2+4z^2})dx + 2xdz = 0$$

$M(x,z) = -(2z+\sqrt{x^2+4z^2}) \rightarrow M(\lambda x,\lambda z) = -\lambda(2z+\sqrt{x^2+4z^2})$

$N(x,z) = 2x, \rightarrow M(\lambda x,\lambda z) = \lambda(2x)$

$\therefore$ $M(x,z)$, $N(x,z)$ son ambos homogéneas de 1º grado.

$\rightarrow$ hacemos la sustitución $z = ux$, $dz = udx + xdu$

en la ecuación se tiene:

$$= -(2ux + \sqrt{x^2+4u^2x^2})dx + 2x(udx+xdu) = 0$$

$$= -x\sqrt{1+4u^2}\,dx + 2x^2du = 0$$

para separar variable dividimos por: $x^2\sqrt{1-4u^2}$:

$$= -\frac{dx}{x} + \frac{2du}{\sqrt{1+4u^2}} = 0$$

integrando se tiene: $= -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{d(2u)}{\sqrt{(2u)^2+1}} = C$

$$= -\ln x + \ln(2u+\sqrt{4u^2+1}) = \ln C$$

$$= \ln(2u+\sqrt{4u^2+1}) = \ln xC$$

tomando exponenciales se tiene:

$$= 2u + \sqrt{4u^2+1} = xC \quad ; \quad \text{pero} \quad u = \frac{z}{x} \rightarrow$$

$$\frac{2z}{x} + \frac{\sqrt{4z^2+x^2}}{x} = xC \equiv 2z + \sqrt{4z^2+x^2} = x^2C$$

$= 2z - x^2C = -\sqrt{4z^2+x^2}$; elevando al cuadrado

$$= 4z^2 - 4zx^2C + x^4C^2 = 4z^2 + x^2$$

$$= 1 + 4zC - x^2C^2 = 0$$

10. $(2x^2+y^2)dx + (2xy+3y^2)dy = 0$

Solución.

$M(x,y) = 2x^2+y^2 \rightarrow M(\lambda x,\lambda y) = \lambda^2(2x^2+y^2)$

$N(x,y) = 2xy+2y^2 \rightarrow N(\lambda x,\lambda y) = \lambda^2(2xy+3y^2)$

$\therefore$ $M(x,y)$, $N(x,y)$ son funciones homogéneas de 2do grado

$\rightarrow$ hacemos la sustitución $y = ux \rightarrow dy = udx + xdu$, en la ecuación se tiene:

$$= (2x^2+(ux)^2)dx + (2x(ux)+3(ux)^2)(udx+xdu) =$$

$$= x^2(2+3u^2+3u^3)dx + x^3(3u^2+2u)du = 0$$

para separar las variables dividimos por:

$$x^3(3u^3+3u^2+2):$$

$$= \frac{dx}{x} + \frac{(3u^2+2u)du}{3u^3+3u^2+2} = 0$$

integrando se tiene:

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{(3u+2u)du}{3u^3+3u^2+2} = \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{3}\int \frac{d(3u^3+3u^2+2)}{3u^3+3u^2+2} = C$$

$$= \text{Ln}x + \frac{1}{3}\text{Ln}(3u^3 + 3u^2 + 2) = \text{Ln}C$$

$$= \text{Ln}x^3(3u^3 + 3u^2 + 2) = \text{Ln}C^3$$

Tomando exponenciales a ambos miembros:

$$= x^3(3u^3 + 3u^2 + 2) = C$$

pero: $u = \frac{y}{x} \rightarrow$

$$= x^3\left(\frac{3y^3}{x^3} + \frac{3y^2}{x^2} + 2\right) = 3y^3 + 3x\,y^2 + 2x^3 = C$$

11. $2(1 + y)dx - (1 - x)dy = 0$

Solución.

A fin de separar variables dividimos por $(1 + y)(1 - x)$

$$= \frac{2dx}{1 - x} - \frac{dy}{1 + y} = 0$$

Integrando se tiene:

$$= 2\int\frac{dx}{1 - x} - \int\frac{dy}{1 + y} = 0$$

$$= -2\int\frac{d(1 - x)}{1 - x} - \int\frac{dy}{1 + y} = -2\text{Ln}(1 - x) - \text{Ln}(1 + Y) = \text{Ln}C$$

$$= -\text{Ln}(1 - x)(1 + y) = \text{Ln}C \equiv \text{Ln}C(1 - x)(1 + Y) = 0$$

Tomando exponenciales se tiene:

$$= C(1 - x)(1 + y) = 1 \equiv (1 - x)(1 + y) = \frac{1}{c} = C$$

12. $(1 + y)xdx - (1 + x)ydy = 0$

Solución.

A fin de separar variable dividimos por: $(1 + y)(1 + x)$:

$$= \frac{xdx}{1 + x} + \frac{ydy}{1 + y} = 0 \equiv \left(1 - \frac{1}{1 + x}\right)dx + \left(1 - \frac{1}{1 + y}\right)dy = 0$$

integrando se tiene:

$$\int\left(1 - \frac{1}{1 + x}\right)dx + \int\left(1 - \frac{1}{1 + y}\right)dy = \int dx - \int\frac{dx}{1 + x} + \int dy - \int\frac{dy}{1 + y} = C$$

$$= x - \text{Ln}(1 + x) + y - \text{Ln}(1 + y) = \text{Ln}C$$

$$= \text{Ln}C(1 + x)(1 + y) = -(x + y)$$

tomando exponenciales a ambos miembros

$$= C(1 + x)(1 + y) = e^{-(x + y)}$$

13, $(3x + y)dx + (x + y)dy = 0$

Solución.

$M(x,y) = 3x + y \quad \rightarrow \quad M(\lambda x,\lambda y) = \lambda(3x + y)$

$N(x,y) = x + y \quad \rightarrow \quad N(\lambda x,\lambda y) = \lambda(x + y)$

$\therefore$ $M(x,y)$, $N(x,y)$ son homogéneas de 1er grado:

$\rightarrow$ hacemos la sustitución $\quad y = ux \quad \rightarrow \quad dy = udx + xdu$

$$= (3x + ux)dx + (x + ux)(udx + xdu)$$

$$= x(u^2 + 2u + 3)dx + x^2(u + 1)du = 0$$

para separar las variables dividimos por: $x^2(u^2 + 2u + 3)$

$$= \frac{dx}{x} + \frac{(u + 1)du}{u^2 + 2u + 3} = 0$$

integrando se tiene:

$$= \int\frac{dx}{x} + \int\frac{(u + 1)du}{u^2 + 2u + 3} = \int\frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int\frac{d(u^2 + 2u + 3)}{u^2 + 2u + 3} = 0$$

$$= \text{Ln}x + \frac{1}{2}\text{Ln}(u^2 + 2u + 3) = \text{Ln}C$$

$$= \text{Ln}x^2(u^2 + 2u + 3) = \text{Ln}C^2$$

tomando exponenciales se tiene:

$$= x^2(u^2 + 2u + 3) = C$$

pero: $u = \frac{y}{x} \rightarrow$

$$x^2(\frac{y^2}{x^2} + \frac{2y}{x} + 3) = y^2 + 2xy + 3x^2 = C$$

14. $xy(y + 2)dx - (y + 1)dy = 0$

Solución.

$$= xdx - \frac{(y + 1)dy}{y(y + 2)} = 0$$

integrando se tiene:

$$\int xdx - \int \frac{(y + 1)dy}{y^2 + 2y} = \int xdx - \frac{1}{2}\int \frac{d(y^2 + 2y)}{y^2 + 2y} = C$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}Ln(y^2 + 2y) = LnC$$

$$= - LnC^2(y^2 + 2y) = - x^2$$

$$= LnC^2(y^2 + 2y) = x^2$$

Tomando exponenciales se tiene:

$$= C^2(y^2 + 2y) = e^{x^2}$$

15. $(x - 2y)dx - (2x + y)dy = 0$

Solución.

$M(x,y) = x - 2y \to N(\lambda x,\lambda y) = \lambda(x - 2y)$

$N(x,y) = 2x + y \to N(\lambda x,\lambda y) = \lambda(2x + y)$

$\therefore$ $M(x,y)$, $N(x,y)$ son funciones homogéneas de grado 1.

$\to$ hacemos la sustitución $y = ux \to dy = udx + xdu$

$= (x - 2ux)dx - (2x + ux)(udx + xdu) = 0$

$= x(1 - 4u - u^2)dx - x^2(2 + u)du = 0$

para separar variable dividimos por: $x^2(1 - 4u - u^2)$

$$= \frac{dx}{x} - \frac{(u + 2)du}{1 - 4u - u^2} = 0$$

Integrando se tiene:

$$= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{(u + 2)du}{1 - 4u - u^2} = \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{d(1 - 4u - u^2)}{1 - 4u - u^2} = C$$

$$= Lnx + \frac{1}{2}Ln(1 - 4u - u^2) = LnC$$

$$= Lnx^2(1 - 4u - u^2) = LnC^2$$

tomando exponenciales se tiene:

$$= x^2(1 - 4u - u^2) = C$$

pero: $u = y/x \to$

$$= x^2(1 - \frac{4y}{x} - \frac{y^2}{x^2}) = C \equiv x^2 - 4xy - y^2 = C$$

16. $(3x + 2y)dx + xdy = 0$

$M(x,y) = 3x + 2y \to M(\lambda x,\lambda y) = \lambda(3x + 2y)$

$N(x,y) = x \to N(\lambda x,\lambda y) = \lambda x$

$\therefore$ $M(x,y)$, $N(x,y)$ son funciones homogéneas de 1º grado $\to$ hacemos la sustitución $y = ux \to dy = udx + xdu$.

$= (3x + 2ux)dx + x(udx + xdu) =$

$= x(3 + 3u)dx + x^2du = 0$

para separar variables dividimos por: $x^2(3 + 3u)$:

$$= \frac{dx}{x} + \frac{du}{3 + 3u} = 0$$

integrando se tiene: $= \int \frac{dx}{x} + \int \frac{du}{3 + 3u} = \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{3}\int \frac{du}{3 + 3u} = C$

$$= Lnx + \frac{1}{3}Ln(3 + 3u) = LnC$$

$$= Lnx^3(3 + 3u) = LnC^3$$

tomando exponencial se tiene:

$$= x^3(3 + 3u) = C$$

pero: $u = y/x$

$$\rightarrow \quad x^3\frac{3x + 3y)}{x} = C \equiv 3x^3 + 3x^2y = C$$

17. $(x^2 + y^2)dx + (2xy + y^2)dy = 0$

Solución.

$M(x,y) = x^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad M(\lambda x,\lambda y) = \lambda^2(x^2 + y^2)$

$N(x,y) = 2xy + y^2 \quad \rightarrow \quad N(\lambda x,\lambda y) = \lambda^2(2xy + y^2)$

$\therefore$ $M(x,y)$, $N(x,y)$ son funciones homogéneas de 2º grado

$\rightarrow$ hacemos la sustitución $y = ux \rightarrow dy = udx + xdu$

en la ecuación se tiene:

$$= (x^2 + u^2x^2)dx + (2ux^2 + u^2x^2)(udx + xdu) = 0$$

$$= x^2(1 + 3u^2 + u^3)dx + x^3(2u + u^2)du = 0$$

A fin de separar las variables dividimos por $x^3(1 + 3u^2 + u^3)$;

$$= \frac{dx}{x} + \frac{(2u + u^2)du}{1 + 3u^2 + u^3} = 0$$

integrando se tiene:

$$= \int\frac{dx}{x} + \int\frac{(2u + u^2)du}{1 + 3u^2 + u^3} = \int\frac{dx}{x} + \frac{1}{3}\int\frac{d(u^3 + 3u^2 + 1)}{u^3 + 3u^2 + 1} = C$$

$$= Lnx + \frac{1}{3}Ln(u^3 + 3u^2 + 1) = LnC$$

$$= Lnx^3(u^3 + 3u^2 + 1) = LnC^3$$

tomando exponencial a ambos miembros:

$$= x^3(u^3 + 3u^2 + 1) = C$$

pero: $u = y/x \quad \rightarrow \quad = x^3(y^3/x^3 + 3y^2/x^2 + 1) = y^3 + 3y^2x + x^3 = C$

En cada uno de los siguientes problemas, hallar la solución particular que se determina por los valores dados de x,y.

18. $\frac{dx}{y} + \frac{4dy}{x} = 0, \quad x = 4, \quad y = 2$

Solución.

separando variable, a tiene: e integrando se tiene:

$$= \int xdx + \int 4ydy = 0$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{4y^2}{2} = C \equiv x^2 + 4x^2 = 2C \qquad \text{solución general}$$

imponiendo la condición: $x = 4$, $y = 2$ en la solución general se tiene:

$$16 + 16 = 2C \quad \rightarrow \quad C = \frac{32}{2} \quad \rightarrow \quad C = 16$$

$\therefore$ la solución particular se obtiene reemplazando C en la sol. general

$$x^2 + 4y^2 = 32$$

19. $(x^2 + y^2)dx = 2xydy; \; (x,y) = (1,0)$

Solución.

$M(x,y) = x^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad M(\lambda x,\lambda y) = \lambda^2(x^2 + y^2)$

$N(x,y) = 2xy \quad \rightarrow \quad N(\lambda x,\lambda y) = \lambda^2(2x^2y)$

$\therefore$ $M(x,y)$, $N(x,y)$ son funciones homogéneas de grado 2.

$\rightarrow$ hacemos la sustitución: $y = ux \rightarrow dy = udx + xdu$

$$= (x^2 + u^2x^2)dx = 2x^2u(udx + xdu)$$

$$= x^2(1 - u^2)dx - 2x^3udu = 0$$

para separar variables dividimos por; $x^3(1 - u^2)$

$$= \frac{dx}{x} - \frac{2udu}{1-u^2} = 0$$

integrando se tiene:

$$= \int\frac{dx}{x} - 2\int\frac{udu}{1 - u^2} = \int\frac{dx}{x} + \int\frac{d(1 - u^2)}{1 - u^2} = C$$

$= \text{Ln}x + \text{Ln}(1 - u^2) = \text{Ln}C$

$= \text{Ln}x(1 - u^2) = \text{Ln}C$

tomando exponenciales se tiene: $x(1 - u^2) = C$

pero: $u = y/x \rightarrow \dfrac{x(x^2 - y^2)}{x^2} = C \rightarrow x^2 - y^2 = Cx$ (*)

imponiendo la condición $(x,y) = (1,0)$ en (*) se tiene: $C = 1$

$\rightarrow$ la solución particular será:

$$x^2 - y^2 = x \rightarrow \boxed{y^2 = x^2 - x}$$

20. $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$, $(x,y) = (1/2, 0)$

Solución.

$-(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx + xdy = 0$

$\rightarrow M(x,y) = -(y + \sqrt{x^2 + y^2}) \rightarrow M(\lambda x,\lambda y) = -\lambda(y + \sqrt{x^2 + y^2})$

$N(x,y) = x \rightarrow N(\lambda x,\lambda y) = \lambda x$

$\therefore$ $M(x,y)$, $N(x,y)$ son funciones homogéneas de grado 1.

$\rightarrow$ hacemos la sustitución $y = ux \rightarrow dy = udx + xdu$

$= -(ux + \sqrt{x^2 + u^2x^2})dx + x(udx + xdu) = 0$

$= -x\sqrt{1 + u^2}\,dx + x^2du = 0$

para separar variables dividimos por: $x^2\sqrt{1 + u^2}$:

$$= -\frac{dx}{x} + \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = 0$$

integrando se tiene:

$$= -\int\frac{dx}{x} + \int\frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = -\text{Ln}x + \text{Ln}(u + \sqrt{1 + u^2}) = \text{Ln}C$$

$$= \frac{\text{Ln}(u + \sqrt{1 + u^2})}{x} = \text{Ln}C$$

tomando exponenciales se tiene:

$$\frac{u + \sqrt{1 + u^2}}{x} = C$$

pero: $u = y/x \rightarrow = y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2$

$\sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2 - y^2$, elevando al cuadrado se tiene:

$x^2 + y^2 = C^2x^4 - 2x^2y\,C + y^2$

$= 1 + 2yC - C^2x^2 = 0$ (*)

imponiendo la condición $x = 1/2$, $y = 0$, en (*) se tiene el valor de $C = \pm 2$

$\rightarrow$ Reemplazando $C = 2$ obtenemos:

$1 + 4y - 4x^2 = 0$ q' es la solución particular.

21. Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto (2,1), y cuya pendiente en un punto cualquiera es: $-(1 + y/x)$.

Solución.

Sabemos que la pendiente $m = \dfrac{dy}{dx} = -(1 + \dfrac{y}{x})$

$= (x + y)dx + xdy = 0$

$\rightarrow M(x,y) = x + y \rightarrow M(\lambda x,\lambda y) = \lambda(x + y)$

$N(x,y) = x \rightarrow N(\lambda x,\lambda y) = \lambda x$

$\therefore$ $M(x,y)$, $N(x,y)$ son funcionas homogéneas de grado 1.

$\rightarrow$ hacemos la sustitución $y = ux \rightarrow dy = udx + xdu$ en la ecuación se tiene:

$= (x + ux)dx + x(udx + xdu) = 0$

$= x(1 + 2u)dx + x^2du = 0$

A fin de separar las variables dividimos por: $x^2(1 + 2u)$:

$$= \frac{dx}{x} + \frac{du}{1 + 2u} = 0$$

integrando se tiene:

$$= \int\frac{dx}{x} + \int\frac{du}{1 + 2u} = \int\frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int\frac{d(1 + 2u)}{1 + 2u} = C$$

$= \text{Ln}x + \frac{1}{2}\text{Ln}(1 + 2U) = \text{Ln}C.$

$= \text{Ln}x^2(1 + 2u) = \text{Ln}C^2$

tomando exponenciales se tiene:

$= x^2(1 + 2u) = C$; pero: $u = y/x \rightarrow$

$= \frac{x^2(x + 2y)}{x} = C \equiv x(x + 2y) = C \quad (*)$

imponiendo la condición de que (*) pasa por el punto (2,1) se obtiene el valor de C:

$$C = 2(2 + 2) = 8 \rightarrow C = 8$$

→ La ecuación de la curva será:

$$x(x + 2x) = 8$$

22. Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto (1,0), cuya pendiente en un punto cualquiera es igual a $\frac{y - 1}{x^2 + x}$

Solución.

Sabemos que la pendiente $m = \frac{dy}{dx} = \frac{y - 1}{x^2 + x}$

separando variable se tiene:

$$\frac{dy}{y - 1} - \frac{dx}{x^2 + x} = 0$$

integrando se tiene:

$$\int \frac{dy}{y - 1} - \int \frac{dx}{x^2 + x} = \int \frac{dy}{y - 1} - \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x + 1} = C$$

$$= \text{Ln}(y - 1) - \text{Ln}x + \text{Ln}(x + 1) = \text{Ln}C$$

$$= \frac{\text{Ln}(y - 1)(x + 1)}{x} = \text{Ln}C$$

tomando exponenciales se tiene: $= (y - 1)(x + 1) = Cx \quad (*)$

pero (*) pasa por el punto (1,0) → se tiene $C = -2$

∴ La ecuación de la curva será: $= (y-1)(x+1) = -2x \rightarrow y(x+1) = 1 - x$

Se llama ecuación lineal de 1º grado, 1º orden a la ecuación que es lineal tanto en la variable dependiente como en su derivada y tiene la forma:

$$\frac{dy}{dx} + y\,P(x) = Q(x) \quad \ldots. \quad (1)$$

donde P,Q, son funciones de x unicamente o constantes de la misma manera.

$$\frac{dx}{dy} + x\,F(x) = J(y)$$

donde P, Q son funciones de y unicamente o constantes.

de (1) obtenemos:

$$dy + yP(x)dx = Q(x)dx$$

La cual escogemos como la forma standar de la ecuación (1)

$$\frac{d}{dx}\left(y e^{\int P(x)dx}\right) = \frac{dy}{dx} e^{\int P(x)dx} + y\,P(x)\,e^{\int P(x)dx} = e^{\int P(x)dx}\left(\frac{dy}{dx} + P(x)y\right)$$

→ A: $\psi(x) = e^{\int P(x)dx}$ denominamos factor integrante y su primitiva es:

$$y\,e^{\int P(x)dx} = \int Q(x).e^{\int P(x)dx}\,dx + C$$

Teniendo un factor de integración a la mano, daremos la siguiente regla: para integrar (1).

a) Poner (1) a la forma standar

b) obtener el factor integrante $\psi(x) = e^{\int P(x)dx}$

c) Aplicar el factor integrante a la ecuación en su forma standar

d) Resolver la ecuación exacta resultante.

IV ECUACIONES QUE PUEDEN REDUCIRSE LA FORMA LINEAL

El tipo de tales ecuaciones es:

$$\frac{dy}{dx} + y\,P(x) = Q(x)\,y^n, \quad (*) \quad \text{(Ecuación de Bernoulli)}$$

Si $n = 1$, en (*), las variables son separables

si $n \neq 1$, para reducir la forma (III) hacemos la sustitución.

$$z = y^{-n+1} \rightarrow dz = (1 - n)y^{-n}dy \qquad (**)$$

$$\frac{dy}{dx} + y\,P(x) = Q(x)y^n = y^{-n}dy + y^{-n+1}P(x)dx = Q(x)dx$$

$$= dz + (1-n)z\,P(x) = (1-n)Qdx \quad \text{por} \quad (**)$$

$\Longrightarrow$ se tiene una ecuación de la forma standar en x,z.

PROBLEMAS

Hallar la solución general de c/u de las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $x\frac{dy}{dx} - 2y = 2x$

Solución.

poniendo la ecuación a su forma standar se tiene:

$$= dy - \frac{2y}{x}dx = 2\,dx \qquad (*)$$

Aquí: $P(x) = -\frac{2}{x} \Longrightarrow$ el factor integrante será:

$$\psi(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int -\frac{2dx}{x}} = e^{-2\int\frac{dx}{x}} = e^{-2\ln x} = e^{-\ln x^2} = \frac{1}{x^2}$$

$\Longrightarrow$ multiplicando a (*) por el factor integrante $\psi(x) = \frac{1}{x^2}$

se tiene $= \frac{dy}{x^2} - \frac{2ydx}{x^3} = \frac{2\,dx}{x^2}$

$$= d(x^{-2}y) = \frac{2\,dx}{x^2}$$

integrando se tiene:

$$= \int d(x^{-2}y) = x^{-2}y = 2\int\frac{dx}{x^2} = -\frac{2}{x} + C$$

$$= x^{-2}y = -\frac{2}{x} + C \Longrightarrow y = C\,x^2 - 2x$$

2. $\frac{xdy}{dx} - 2y = -x$

Solución.

poniendo la ecuación a su forma standar se tiene:

$$dy - \frac{2\,ydx}{x} = (-1)dx \qquad (*)$$

$\Longrightarrow P(x) = -\frac{2}{x} \Longrightarrow$ el factor integrante será $\psi(x) = \frac{1}{x^2}$

$\Longrightarrow$ multiplicando a (*) por el factor integrante $\psi(x) = \frac{1}{x^2}$

$$= \frac{dy}{x^2} - \frac{2y}{x^3}dx = -\frac{dx}{x^2} \quad ; \quad = d(x^{-2}y) = -\frac{dx}{x^2}$$

integrando se tiene:

$$\int d(x^{-2}y) = -\int\frac{dx}{x^2} \Longrightarrow x^{-2}y = \frac{1}{x} + C \Longrightarrow y = Cx^2 + x$$

3. $\frac{dy}{dx} - 2y = 1 - 2x$

Solución.

poniendo la ecuación a su forma standar se tiene:

$$= dy - 2ydx = (1-2x)dx \qquad (*)$$

Aquí $P(x) = -2 \Longrightarrow$ el factor integrante será:

$$\psi(x) = e^{-2\int dx} = e^{-2x}$$

$\Longrightarrow$ multiplicando a (*) por el factor integrante $\psi(x) = e^{-2x}$

$$= e^{-2x}dy - 2ye^{-2x}dx = e^{-2x}(1-2x)dx$$

$$= d(e^{-2x}y) = e^{-2x}dx - 2xe^{-2x}dx$$

integrando se tiene:

$$\int d(e^{-2x}y) = e^{-2x}y = \int e^{-2x}dx - 2\int x\,e^{-2x}dx =$$

$$\Longrightarrow (e^{-2x}y) = \int e^{-2x}dx - 2\int x\,e^{-2x}dx$$

I) $-2\int x\,e^{-2x}dx$ por integración por partes se tiene:

$$\int udv = uv - \int vdu: \quad u = x,\ du = dx$$

$$dv = e^{-2x}dx \Longrightarrow v = -\frac{1}{2}e^{-2x}$$

$$\Longrightarrow -2\int x\,e^{-2x}dx = +\frac{2}{2}x\,e^{-2x} + \frac{2}{4}\int e^{-2x}dx = xe^{-2x} + $$
$$+\frac{1}{2}e^{-2x} + C$$

II) $\int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

$\Longrightarrow$ de (I) y (II) se tiene:

$$\int (e^{-2x}y) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + xe^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-2x} + C$$

$$\Longrightarrow y = -\frac{1}{2} + x + \frac{1}{2} + Ce^{2x} = x + C\,e^{2x}$$

4. $\frac{dv}{dx} - y = -2e^{-x}$

poniendo la ecuación a su forma standar se tiene:

$= dy - ydx = -2\,e^{-x}dx \qquad (*)$

$\Longrightarrow P(x) = -1 \Longrightarrow$ el factor integrante será:

$$\psi(x) = e^{-\int dx} = e^{-x}$$

$\Longrightarrow$ multiplicando (*) por el factor integrante $\psi(x)=e^{-x}$

$= e^{-x}dy - y\,e^{-x}dx = -2\,e^{-2x}dx$

$= d(e^{-x}y) = -2\,e^{-2x}dx$; integrando se tiene:

$$\int d(e^{-x}y) = e^{-x}y = -\int 2e^{-2x}dx = -2\int e^{-2x}dx =$$

$$= \int e^{-2x}d(-2x) = e^{-2x} + C$$

$$\Longrightarrow e^{-x}y = e^{-2x} + C \Longrightarrow y = e^{-x} + C\,e^{x}$$

5. $\frac{ds}{dt} - 5\,ctg\,t = 1 - (t+2)ctg(t)$

Llevando la ecuación a su forma standar se tiene:

$= ds - s\,ctg(t)dt = [1 - (t+2)ctg\,t]dt \qquad (*)$

$\Longrightarrow P(x) = -ctg(t) \Longrightarrow$ el factor integrante será:

$$\psi(t) = e^{-\int ctgtdt} = e^{-\ln sen\,t} = \frac{1}{sen\,t}$$

multiplicando a (*) por el factor integrante $\psi(t) = \frac{1}{sen\,t}$

$$= \frac{ds}{sen\,t} - \frac{s\,ctg\,t}{sen\,t}dt = \frac{dt}{sen\,t} - \frac{(t+2)ctgt}{sen\,t}dt$$

$$= d\left(\frac{s}{sent}\right) = \frac{dt}{sen\,t} - \frac{(t+2)ctgt}{sent}dt = \frac{dt}{sen\,t} - \frac{tcostdt}{sen^2t} - 2\frac{cost}{sen^2t}dt$$

integrando tenemos:

$$\int d\left(\frac{s}{sent}\right) = \int\frac{dt}{sen\,t} - \int t\frac{cos\,t}{sen^2t} - 2\int\frac{cos\,t}{sen^2t}dt$$

$$\frac{s}{sen\,t} = \int\frac{dt}{sen\,t} - \int t\frac{cos\,t}{sen^2t} - 2\int\frac{cos\,t}{sen^2t}dt$$

I) $\int\frac{dt}{sen\,t} = \ln(csc\,t - ctg\,t) + C_1$

II) $-\int t\frac{cos\,t}{sen^2t}dt =$ (integrando por partes: $\int udv = uv - \int vdu$

$u = t \Longrightarrow du = dt$

$dv = \frac{cost}{sen^2t}dt \Longrightarrow v = -\frac{1}{sen\,t}$

$$\Longrightarrow -\int t\frac{cos\,t}{sen^2t}dt = \frac{t}{sen\,t} - \int\frac{dt}{sen\,t} = \frac{t}{sen\,t} - \ln(csct - ctg\,t) + C_2$$

III) $-2\int\frac{cos\,t}{sen^2t}dt = \frac{+2}{sen\,t} + C_3$

$\Longrightarrow$ de (I), (II), (III) se tiene que:

$$\frac{s}{sen\,t} = \ln(csc\,t - ctg\,t) + \frac{t}{sen\,t} - \ln(csc\,t - ctg\,t) +$$
$$\frac{2}{sen\,t} + \overbrace{C_1 + C_2 + C_3}^{C} \Longrightarrow s = t + 2 + c\,sen\,t$$

6. $\frac{ds}{dt} + s\,tg\,t = 2t + t^2 tg\,t$

Llevando la ecuación a su forma standar se tiene:

$ds + s tg(t)dt = (2t + t^2 tgt)dt \qquad (*)$

$\Longrightarrow P(t) = tg(t) \Longrightarrow \psi(t) = e^{\int tgtdt} = e^{\ln(sect)} = sect.$

factor integrante, multiplicando a (*) por el factor integrante

$\psi(t) = sec\,t$

$= sectds + stg\,t\,sect\,dt = 2tsectdt + t^2 tgt.sectdt$

$= d(sect.s) = 2tsectdt + t^2 tg(t.sectdt)$

integrando se tiene

$\int d(sect.S) = sect.S = 2\int tsectdt + \int t^2 tgt.sectdt \qquad (**)$

$sect.S =$

I) $\int t^2 tgt.sectdt =$

$u = t^2 \Longrightarrow du = 2tdt$

$dv = tgt.sectdt \Longrightarrow v = sect$

$= t^2.sect - 2\int tsectdt + C$

(I) en (**) se tiene:

$\Longrightarrow sect.S = 2\int tsectdt + t^2 sect - 2\int tsectdt + C$

$sect.S = t^2 sect + C$

$\Longrightarrow S = t^2 + \frac{c}{sec\,t} t^2 + ccos\,t$

7. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y^3$

poniendo la ecuación a su forma standar:

$dy + \frac{y}{x}dx = y^3 dx \Longrightarrow y^{-3}dy + \frac{y^{-2}}{x}dx = dx \qquad (*)$

haciendo la sustitución.

$z = y^{-n+1} = y^{-2} \Longrightarrow dz = -2y^{-3}dy \Longrightarrow -\frac{dz}{2} = y^{-3}dy$

en (*) se tiene:

$-\frac{dz}{2} + \frac{z}{x}dx = dx = dz - \frac{2z}{x}dx = -2\,dx \quad (**)$

$P(x) = -\frac{2}{x} \Longrightarrow$ el factor integrante será:

$\psi(x) = e^{-2\int\frac{dx}{x}} = e^{-\ln x^2} = \frac{1}{x^2}$

multiplicando a(**) $\psi(x) = \frac{1}{x^2}$ se tiene:

$= \frac{dz}{x^2} - \frac{2z}{x^3}dx = -\frac{2dx}{x^2}$

$= d(\frac{z}{x^2}) = -\frac{2\,dx}{x^2}$, integrando se tiene:

$\int d(\frac{z}{x^2}) = \frac{z}{x^2} = -2\int\frac{dx}{x^2} = \frac{2}{x} + C \rightarrow z = 2x + Cx^2$

pero: $z = y^{-2} = \frac{1}{x^2} \rightarrow$

$\frac{1}{y^2} = 2x + Cx^2 \equiv Cx^2y^2 + 2xy^2 - 1 = 0$

8. $\frac{nxdy}{dx} + 2y = xy^{n+1}$

poniendo la ecuación a su forma standar:

$=$ Si $dy + \frac{2y}{x}dx = y^{n+1}dx$

$= n\; y^{-(n+1)}dy + \frac{2y^{-n}}{x}dx = dx \qquad (*)$

y haciendo la sustitución:

$z = y^n \Longrightarrow dz = -nq^{-(n+1)}dy$ en (*) se tiene:

$= -dz + \frac{2z}{x}dx = dx \quad \equiv dz - \frac{2dz}{x} = -dx \qquad (**)$

$P(x) = -\frac{2}{x} \Longrightarrow \psi(x) = e^{-2\int\frac{dx}{x}} = e^{-\ln x^2} = 1/x^2$

es el factor integrante $\Longrightarrow$ multiplicando (**) por $\psi(x)$ se tiene:

$$= \frac{dz}{x^2} - \frac{2zdx}{x^3} = -\frac{dx}{x^2}$$

$$= d(\frac{z}{x^2}) = -\frac{dx}{x^2}$$

integrando $\int d(\frac{x}{x^2}) = -\int\frac{dx}{x^2} = \frac{z}{x^2} = \frac{1}{x} + C$

pero: $z = y^{-n} = 1/y^n$

$$\Longrightarrow \frac{1}{y^n x^2} = \frac{1}{x} + C \Longrightarrow 1 = Cx^2y^n + xy^n$$

$$\Longrightarrow Cx^2y^n + xy^n - 1 = 0$$

9. $\frac{ds}{dt} - sctgt = e^t(1 - ctgt)$

poniendo la ecuación a su forma standar:

$= ds - sctgtdt = e^t dt - ctgtdt \qquad (*)$

$P(t) = -ctg(t) \Longrightarrow$ el factor integrante será:

$\psi(t) = e^{-\int ctgtdt} = e^{-\ln sent} = \frac{1}{sen\ t}$

multiplicando a (*) por $\psi(t) = \frac{1}{sen\ t}$ se tiene:

$$\frac{ds}{sen\ t} - s\frac{ctgt}{sent}dt = \frac{e^t}{sent}dt - \frac{e^t ctgt}{sent}dt$$

$$= \frac{ds}{sent} - \frac{scost}{sen^2t}dt = \frac{e^t dt}{sent} = \frac{e^t cost}{sen^2t}dt$$

$= d(\frac{s}{sent}) = \frac{e^t dt}{sent} - \frac{costdt}{sen^2t}$, integrando se tiene:

$$\int d(\frac{s}{sent}) = \frac{s}{sent} = \int\frac{e^t dt}{sent} - \int\frac{e^t costdt}{sen^2t} \qquad (**)$$

I) $-\int\frac{e^t cost}{sen^2t} =$; por la integración por partes:

$\int vdu = uv - \int vdu \quad ; \quad u = e^t \Longrightarrow du = e^t dt$

$dv = \frac{cost}{sen^2t} \Longrightarrow v = -\frac{1}{sent} \quad = \frac{e^t}{sent} - \int\frac{e^t dt}{sent}$

Reemplazando (I) en (**) se tiene:

$$\Longrightarrow \frac{s}{sent} = \int\frac{e^t dt}{sent} - \int\frac{e^t cost}{sen^2t}dt = \int\frac{e^t dt}{sent} + \frac{e^t}{sent} - \int\frac{e^t dt}{sent} + C$$

$$\frac{s}{sent} = \frac{e^t}{sent} + C \Longrightarrow s = e^t + c\ sent$$

10. $\frac{dy}{dx} + y = 2 + 2x$

poniendo la ecuación a su forma standar:

$= dy + ydx = (2 + 2x)dx \qquad (*)$

$P(x) = 1 \Longrightarrow$ El factor integrante es: $\psi(x) = e^{\int dx} = e^x$

multiplicando (*) por $\psi(x)$ se tiene:

$$e^x dy + ye^x dx = (2e^x + 2xe^x)dx$$

$$= d(e^x y) = 2e^x dx + 2xe^x dx$$

integrando se tiene:

$$\int d(e^x y) = e^x y = 2\int e^x dx + 2\int xe^x dx$$

$e^x y = 2e^x + 2\int xe^x dx \qquad (**)$

I) $2\int xe^x dx =$ mediante la integración por partes se tiene

$u = x \Longrightarrow du = dx \quad ; \quad dv = e^x dx \Longrightarrow v = e^x$

$2\int xe^x dx = 2xe^x - 2\int e^x dx = 2xe^x - 2e^x + C$

I) en (**) se tiene:

$$e^x y = 2e^x + 2xe^x - 2e^x + C = 2xe^x + C$$

$$\Longrightarrow y = 2x + Ce^{-x}$$

11. $x\frac{dy}{dx} + y = (1 + x)e^x$

poniendo la ecuación a su forma standar:

$$dy + \frac{y}{x}dx = \left(\frac{1 + x}{x}\right)e^x dx \qquad (*)$$

$P(x) = \frac{1}{x} \Longrightarrow$ El factor integrante será:

$$\psi(x) = e^{\int\frac{dx}{x}} = e^{\ln x} = x$$

multiplicando (*) por $\psi(x) = x$ se tiene:

$= xdy + ydx = (1 + x)e^x dx \quad ; \quad = d(xy) = e^x dx + xe^x dx$

integrando se tiene:

$$\int d(xy) = xy = \int e^x dx + \int xe^x dx = e^x + xe^x - e^x + C$$

$$yx = xe^x + C \Longrightarrow y = e^x + \frac{C}{x}$$

12. $\frac{xdy}{dx} + y + x^2y^2 = 0 \quad ; \quad = \frac{xdy}{dx} + y = -x^2y^2$

poniendo la ecuación a su forma standar:

$$dy + \frac{y}{x}dx = -xy^2 dx \Longrightarrow y^{-2}dy + \frac{y^{-1}}{x}dx = -xdx \qquad (*)$$

y haciendo la sustitución:

$$z = y^{n+1} \Longrightarrow z = y^{-1} \Longrightarrow dz = -y^{-2}dy \Longrightarrow -dz = y^{-2}dy$$

en (*) se tiene:

$$-dz + \frac{z}{x}dx = -xdx \Longrightarrow dz = \frac{z}{x}dx = xdx \qquad (**)$$

$P(x) = -\frac{1}{x} \Longrightarrow$ el factor integrante será:

$$\psi(x) = e^{-\int\frac{dx}{x}} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

multiplicando (**) por $\psi(x)$ se tiene:

$$\frac{dz}{x} - \frac{z}{x^2}dx = dx \quad ; \quad d\left(\frac{z}{x}\right) = dx$$

integrando se tiene $\int d\left(\frac{z}{x}\right) = \frac{z}{x} = \int dx = x + C$

$$\Longrightarrow \frac{z}{x} = x + C \Longrightarrow z = x^2 + cx \ ; \ \text{pero:} \ z = y^{-1} = \frac{1}{y}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{y} = x^2 + cx \Longrightarrow x^2y + cxy - 1 = 0$$

13. $\frac{ds}{dt} - s\operatorname{ctg}t + \csc t = 0$

$$= \frac{ds}{dt} - s\operatorname{ctg}t = -\csc t$$

poniendo la ecuación a su forma standar:

$$= ds - s\operatorname{ctg}t\,dt = -\csc t\,dt \qquad (*)$$

$P(t) = -\operatorname{ctg}t \Longrightarrow$ el factor integrante será:

$$\psi(t) = e^{-\int\operatorname{ctg}t\,dt} = e^{-\ln\operatorname{sen}t} = \frac{1}{\operatorname{sen} t}$$

multiplicando a (*) por: $\psi(t) = \frac{1}{\operatorname{sen} t}$

$$= \frac{ds}{\operatorname{sen}t} - \frac{s\operatorname{ctg}t}{\operatorname{sen}t}dt = -\frac{\csc t}{\operatorname{sen}t}dt$$

$$= \frac{ds}{\operatorname{sen}t} - \frac{s\cos t}{\operatorname{sen}^2 t}dt = -\frac{dt}{\operatorname{sen}^2 t} \quad ; \quad = d\left(\frac{s}{\operatorname{sen}t}\right) = -\frac{dt}{\operatorname{sen}^2 t}$$

$= d\left(\frac{s}{\operatorname{sen}t}\right) = -\frac{dt}{\operatorname{sen}^2 t}$; integrando se tiene:

$$\int d\left(\frac{s}{\operatorname{sen}t}\right) = \frac{s}{\operatorname{sen}t} = -\int\frac{dt}{\operatorname{sen}^2 t} = \frac{1}{\operatorname{sen}t} + C$$

$$\frac{s}{\operatorname{sen}t} = \frac{1}{\operatorname{sen}t} + C \Longrightarrow s = 1 + c\operatorname{sen}t$$

14. $\frac{2dy}{dx} + y = (x - 1)y^3$. Ecuación de Bernoulli

poniendo la ecuación a su forma standar:

$$2dy + ydx = (x - 1)y^3dx \Longrightarrow 2y^{-3}dy + y^{-2}dx = (x-1)dx \qquad (*)$$

y haciendo la sustitución:

$$z = y^{-2} \Longrightarrow dz = -2y^{-3}dy \Longrightarrow -dz = 2y^{-2}dy$$

en (*) se tiene:

$$= -dz + zdx = (x - 1)dx \Longrightarrow dz - zdx = -(x-1)dx \qquad (**)$$

$P(x) = -1 \Longrightarrow$ el factor integrante será:

$$\psi(x) = e^{-\int dx} = e^{-x}$$

multiplicando a (**) por $\psi(x) = e^{-x}$ se tiene:

$$e^{-x}dz - ze^{-x}dx = -e^{-x}(x-1)dx$$

$$= d(e^{-x}z) = -xe^{-x}dx + e^{-x}dx$$

integrando se tiene:

$$\int d(e^{-x}z) = e^{-x}z = -\int xe^{-x}dx + \int e^{-x}dx$$

$$e^{-x}z = xe^{-x} - e^{-x} + e^{-x} + C \Longrightarrow z = x + ce^{x}$$

pero: $z = y^{-2} = \frac{1}{y^2} \Longrightarrow \frac{1}{y^2} = x + ce^{x} \Longrightarrow xy^2 + cy^2e^{x} - 1 = 0$

15. $\frac{xdy}{dx} - y = x\cos x - \operatorname{sen} x$

poniendo la ecuación a su forma standar:

$$= dy - \frac{y}{x}dx = \left(\cos x - \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)dx \qquad (*)$$

$P(x) = -\frac{1}{x} \Longrightarrow$ el factor integrante será:

$$\psi(x) = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

multiplicando (*) por $\psi(x) = \frac{1}{x}$

$$= \frac{dy}{x} - \frac{y}{x^2}dx = \frac{\cos x}{x}dx - \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}dx$$

$$= d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\cos x}{x}dx - \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}dx$$

integrando se tiene $\int d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x} = \int \frac{\cos x}{x}dx - \int \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}dx$

$$\Longrightarrow \frac{y}{x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x} + \int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{x^2} - \int \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}dx + C$$

$$\frac{y}{x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x} + C \Longrightarrow y = \operatorname{sen} x + cx$$

16. $\frac{ndy}{dx} - y + (x^2 + 2x)y^{n+1} = 0$

$$= \frac{ndy}{dx} - y = -(x^2 + 2x)y^{n+1}$$

poniendo la ecuación a su forma standar

$$ndy - ydx = -(x^2 + 2x)y^{n+1}dx \Longrightarrow ny^{-(n+1)}dy - y^{-n}dx =$$

$$= -(x^2 + 2x)dx \qquad (*)$$

y haciendo la sustitución.

$$z = y^{-n} \Longrightarrow dz = -ny^{-(n+1)}dy \Longrightarrow -dz = ny^{-(n+1)}dy$$

en (*) se tiene: $-dz - zdx = -(x^2 + 2x)dx$

$$\Longrightarrow dx + zdx = (x^2 + 2x)dx \qquad (**)$$

$P(x) = 1 \Longrightarrow$ el factor integrante será:

$$\psi(x) = e^{\int dx} = e^{x}$$

multiplicando a (**) por $\psi(x) = e^{x}$ se tiene:

$$e^{x}dz + ze^{x}dx = e^{x}(x^2 + 2x)dx$$

$$= d(e^{x}z) = x^2e^{x}dx + 2xe^{x}dx$$

integrando se tiene: $\int d(e^{x}z) = \int x^2e^{x}dx + 2\int xe^{x}dx$

$$= e^{x}z = x^2e^{x} - 2\int xe^{x}dx + 2\int xe^{x}dx + C$$

$$e^{x}z = x^2e^{x} + C \Longrightarrow z = x^2 + ce^{-x}$$

En cada uno de los siguientes problemas, hallar la solución particular determinada por los valores dados a x,x.

17. $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = x^2e^{x}$, $x = 1$, $y = 0$

poniendo la ecuación a su forma standar:

$$dy - \frac{2ydx}{x} = x^2e^{x}dx \qquad (*)$$

$P(x) = -\frac{2}{x} \Longrightarrow$ el factor integrante será:

$$\psi(x) = e^{-\int \frac{2dx}{x}} = e^{-2\ln x} = e^{-\ln x^2} = \frac{1}{x^2}$$

multiplicando (*) por $\psi(x) = \frac{1}{x^2}$.

$$= \frac{dy}{x^2} - \frac{2y}{x^3}dx = e^x dx \quad ; \quad = d(\frac{y}{x^2}) = e^x dx$$

integrando se tiene: $\int d(\frac{y}{x^2}) = \frac{y}{x^2} = \int e^x dx$

$\Longrightarrow \frac{y}{x^2} = e^x + C \Longrightarrow y = x^2 e^x + Cx^2$ solución general,

imponiendo la condición: $x = 1,\ y = 0$ hallamos el valor de $C + e = 0 \Longrightarrow C = -e$

$\therefore$ La solución particular hallamos al reemplazar $c = -e$ en la solución general:

$$y = x^2(e^x - e)$$

18. $\frac{dy}{dx} + y\ tgx = secx,\ x = 0,\quad y = -1$

poniendo la ecuación a su forma standar,

$$dy + ytgxdx = secxdx \qquad (*)$$

$\Longrightarrow P(x) = tgx \Longrightarrow$ el factor integrante será

$$\psi(x) = e^{\int tgxdx} = e^{\ln secx} = secx$$

multiplicando a (*) por $\psi(x) = secx$

$secxdy + ytgx\ secxdx = sec^2dx \quad ; \quad d(secx.y) = sec^2xdx$

integrando tendremos:

$$= \int d(secx.y) = ysecx = \int sec^2x^2dx$$

$$\Longrightarrow ysecx = tgx + C \Longrightarrow y = \frac{tgx}{secx} + \frac{C}{secx} = senx + ccosx$$

$$\Longrightarrow y = senx + Ccosx \qquad (**)$$

imponiendo la condición $x = 0,\ y = -1$

$\Longrightarrow sen(0) + C\cos(0) = -1 \Longrightarrow C = -1$

poniendo $C = -1$ en (**) se obtiene la solución particular

$$y = sen\ x - cos\ x$$

19. $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3,\ x = 0,\quad y = 1$

poniendo la ecuación a su forma standar:

$$dy - \frac{2ydx}{x+1} = (x+1)^3dx \qquad (*)$$

$P(x) = -\frac{2}{x+1} \Longrightarrow$ el factor integrante será:

$$\psi(x) = e^{-2\int\frac{dx}{x+1}} = e^{-2\ln(x+1)} = e^{-\ln(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

multiplicando a (*) por $\psi(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

$$= \frac{dy}{(x+1)^2} - \frac{2ydx}{(x+1)^3} = (x+1)dx$$

$= d(\frac{y}{(x+1)^2}) = (x+1)dx$; integrando tendremos

$$\int d(\frac{y}{(x+1)^2}) = \frac{y}{(x+1)^2} = \int(x+1)dx$$

$$= \frac{y}{(x+1)^2} = \int xdx + \int dx = \frac{x^2}{2} + x + C$$

$$\Longrightarrow 2y = (x+1)^2(x^2 + 2x + 2c) \qquad (**)$$

imponiendo la condición $x = 0,\ x = 1$, hallamos el valor de C:

$$2C = 2 \Longrightarrow C = 1$$

reemplazando $C = 1$ en (**) se tiene:

$$2y = (x+1)^2(x^2 + 2x + 2) = (x+1)^2[(x+1)^2 + 1] =$$

$$2y = (x+1)^4 + (x+1)^2$$

20. Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto (1,0), y cuya pendiente en un punto cualquiera es igual a: $\frac{2y + x + 1}{x}$

Solución.

Sabemos que la pendiente $m = \frac{dy}{dx} = \frac{2y + x + 1}{x}$

$$= \frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = \frac{x+1}{x}$$

poniendo la ecuación a su forma standar:

$$dy - \frac{2y}{x} dx = \frac{(x+1)}{x} dx \qquad (*)$$

$P(x) = -\frac{2}{x} \Longrightarrow$ el factor integrante será

$$\psi(x) = e^{-2\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln x^2} = \frac{1}{x^2}$$

multiplicando (*) por: $\psi(x) = \frac{1}{x^2}$ se tiene

$$= \frac{dy}{x^2} - \frac{2y}{x^3} dx = \frac{x+1}{x^3} dx \quad ; \quad = \quad d(\frac{y}{x^2}) = (\frac{x+1}{x^3}) dx$$

integrando se tiene: $\int d(\frac{y}{x^2}) = \frac{y}{x^2} = \int (\frac{x+1}{x^3}) dx$

$$\frac{y}{x^2} = \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C$$

$$\Longrightarrow y = -x - \frac{1}{2} + Cx^2 \qquad (**)$$

pero la curva pasa por el punto (1,0)

$$\Longrightarrow 0 = -1 - \frac{1}{2} + C \Longrightarrow C = \frac{3}{2}$$

Reemplazando el valor de $C = \frac{3}{2}$ en (**) se tiene

$$2y = 3x^2 - 2x - 1$$

21. Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto (1,1) y cuya pendiente en un punto cualquiera es igual a:

$$\frac{y^2\ln x - y}{x}$$

Solución.

Sabemos que la pendiente $m = \frac{dy}{dx} = \frac{y^2\ln x - y}{x}$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{y^2\ln x}{x}$$

poniendo la ecuación a su forma standar

$$dy + \frac{y}{x} dx = \frac{y^2\ln x}{x} \Longrightarrow y^{-2}dy + \frac{y^{-1}}{x} dx = \frac{\ln x}{x} dx \qquad (*)$$

y haciendo la sustitución:

$$z = y^{-1} \Longrightarrow dz = -y^{-2}dy \Longrightarrow -dz = y^{-2}dy$$

en (*) se tiene:

$$-dz + \frac{z}{x} dx = \frac{\ln x}{x} dx \Longrightarrow dz - \frac{z}{x} dx = -\frac{\ln x}{x} \qquad (**)$$

$P(x) = -\frac{1}{x} \Longrightarrow$ el factor integrante es

$$\psi(x) = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

multiplicando (**) por $\psi(x) = \frac{1}{x}$ se tiene

$$\frac{dz}{x} - \frac{z}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x^2} dx \quad ; \quad = \quad d(\frac{z}{x}) = -\frac{\ln x}{x^2} dx$$

integrando se tiene

$$\int d(\frac{z}{x}) = \frac{z}{x} = -\int \frac{\ln x}{x^2} \Longrightarrow \frac{z}{x} = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C$$

$$\Longrightarrow z = \ln x + 1 + Cx \quad ; \quad \text{pero, } z = y^{-1} \Longrightarrow z = \frac{1}{x}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{y} = \ln x + 1 + Cx \Longrightarrow 1 = y(\ln x + 1 + Cx) \qquad (***)$$

proponiendo la condición de que (***) pasa por el punto (1,1) $\Longrightarrow$ C = 0,

∴ La ecuación de la curva a: $1 = y(\ln x + 1)$

Dos tipos Especiales de Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior

I) El primer tipo lo constituyen las ecuaciones de la forma:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = X$$

donde X es una función únicamente de x ó una constante.

Para integrar 1º multiplicamos a ambos miembros por dx

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = \int \frac{d^n y}{dx^n} dx = \int x dx + C_1$$

Después se repite el procedimiento (n - 1) veces.

II. El 2do tipo lo constituyen las ecuaciones de la forma:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = Y$$

donde: Y es una función unicamente de x

El método para integrar es como sigue:

1. Escribimos la ecuación en la forma $dy' = Ydx$
2. multiplicamos ambos miembros por y' y se tiene:

$$y'dy' = Yy'dx$$

3. Pero: $y'dx = dy \Longrightarrow$ la ecuación anterior se transforma:

$$y'dy' = Ydy$$

donde en la ecuación las variables y, y' quedan separadas

4. integrando se tiene: $\frac{1}{2} y'^2 = \int Ydy + C_1$

donde el 2do miembro es una función de y.

5. Extrayendo la raíz cuadrada, las variables x,y, quedan separadas y podemos integrar otra vez.

PROBLEMAS:

Hallar la solución general de c/u de las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $\frac{d^2x}{dt^2} = t^2$

Solución.

multiplicando ambos miembros son dt, e integrando se tiene:

$$\frac{dx}{dt} = \int \frac{d^2x}{dt^2} dt = \int t^2 dt$$

$$\Longrightarrow \frac{dx}{dt} = \int t^2 dt = \frac{t^2}{2} + C_1 \text{ , repitiendo el procedimiento}$$

$$x = \int \frac{dx}{dt} dt = \int \left(\frac{t^3}{3} + C_1\right) dt = \frac{1}{3}\int t^3 dt + C_1\int dt$$

$$\Longrightarrow x = \frac{1}{12} t^4 + C_1 t + C_2$$

2. $\frac{d^2x}{dt^2} = x'$

Solución.

Escribimos la ecuación en la forma: $dx' = x'dt$

multiplicamos ambos miembros por: $x' = \frac{dx}{dt}$

$$= x'dx' = X'x'dt \Longrightarrow x'dx' = X'dx \text{ integrando}$$

$$\frac{1}{2} x'^2 = \int x'dx' = \int x'dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\Longrightarrow x'^2 = x^2 + 2C \Longrightarrow x' = \pm\sqrt{x^2 + 2C}$$

Haciendo $2c = C_1$, y tomando la parte positiva

$$\Longrightarrow x' = \frac{dx}{dt} = \sqrt{x^2 + C_1}$$

separando variable e integrando

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + C_1}} = \int dt \Longrightarrow \ln(x + \sqrt{x^2 + C_1}) = t + C_2$$

$\Longrightarrow$ tomando exponenciales a ambos miembros

$$x + \sqrt{x^2 + C_1} = e^{t+C_2} \text{ ; despejando } x \text{ se tiene:}$$

$$\Longrightarrow x^2 + C_1 = (e^{t+C_2} - x)^2 = e^{2(t+C_2)} - 2xe^{t+C_2} + x^2$$

$$\Longrightarrow x = \frac{1}{2} e^{C_2}e^t - \frac{1}{2} C_1 e^{-C_2}e^{-t} =$$

$$\Longrightarrow x = C_3 e^t + C_4 e^{-t}, \quad \text{donde } C_3 = \frac{1}{2}e^{C_2}, \quad C_4 = -\frac{1}{2}e^{C_2}$$

3. $\dfrac{d^2s}{dt^2} = 4 \text{ sen } 2t$:

Solución.

multiplicando ambos miembros por: dt, e integrando:

$$\int \frac{d^2s}{dt^2} d = \frac{ds}{dt} = 4\int \text{sen}2tdt = 2\int \text{sen}2td(2t) = -2\cos 2t + C_1$$

repitiendo el procedimiento:

$$x = \int \frac{ds}{dt}dt = \int (-2\cos 2t + C_1)dt = -2\int \cos 2tdt + C_1\int dt$$

$$= -\text{sen}2t + C_1 t + C_2$$

$$\Longrightarrow x = -\text{sen}2t + C_1 t + C_2$$

4. $\dfrac{d^2s}{dt^2} = \dfrac{1}{(s+1)^2}$

Solución.

$$ds' = \frac{dt}{(s+1)^3} \text{ ; multiplicando ambos miembros por } s'$$

$$s'ds' = \frac{s'dt}{(s+1)^3} = \frac{ds}{(s+1)^3}$$

integrando se tiene:

$$\int s'ds' = \frac{1}{2}s'^2 = \int \frac{ds}{(s+1)^3} = -\frac{1}{2(s+1)^2} + C_1$$

$$\Longrightarrow s' = \sqrt{2C - \frac{1}{(s+1)^2}} \Longrightarrow \frac{ds}{dt} = \sqrt{2C - \frac{1}{(s+1)^2}}$$

Separando variable e integrando se tiene:

$$\int \frac{ds}{\sqrt{2C - \frac{1}{(s+1)^2}}} = \int dt \Longrightarrow \int \frac{(s+1)ds}{\sqrt{2C(s+1)^2 - 1}} = \int dt$$

$$= \int (s+1)(C_1(s+1)^2 - 1)^{-1/2}ds = \int dt, \quad \text{donde: } 2C = C_1$$

$$= \frac{1}{2C_1}\int [C_1(s+1)^2 - 1]^{-1/2} d(C_1(s+1)^2 - 1) = \int dt$$

$$\frac{1}{C_1}[C_1(s+1)^2 - 1]^{1/2} = t + C_2$$

$$\Longrightarrow (C_1(s+1)^2 - 1)^{1/2} = C_1 t + C_1C_2$$

$$C_1(s+1)^2 - 1 = (C_1 t + C_1 C_2)^2$$

$$\Longrightarrow C_1(s+1)^2 = (C_1 t + C_1 C_2)^2 + 1$$

5. $\dfrac{d^2s}{dt^2} = \dfrac{1}{\sqrt{as}}$

Solución.

$$ds' = \frac{dt}{\sqrt{as}} \text{ ; multiplicamos ambos miembros por } s'$$

$$\int s'ds' = \frac{s'dt}{\sqrt{as}} = \frac{ds}{\sqrt{as}} \text{ ; integrando se tiene}$$

$$\int s'ds' = \frac{1}{2}s'^2 = \int \frac{ds}{\sqrt{as}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int s^{-1/2}ds = \frac{2}{\sqrt{a}}\sqrt{s} + C$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}s'^2 = \frac{2}{\sqrt{a}}\sqrt{s} + C \Longrightarrow s' = \sqrt{\frac{4\sqrt{s} + 2\sqrt{a}C}{\sqrt{a}}} =$$

$$= \sqrt{4\sqrt{\frac{s}{a}} + 2C_1}$$

$$\Longrightarrow \frac{ds}{dt} = \sqrt{4\sqrt{\frac{s}{a}} + 2C_1}$$

separando variables e integrando se tiene:

$$\int \frac{ds}{4\sqrt{\frac{s}{a}+2C_1}} = \int dt$$

Hacemos el siguiente cambio de variable:

$$\sqrt{\frac{s}{a}} = x^2 \Longrightarrow s = ax^4 \Longrightarrow ds = 4ax^3dx$$

$$= \int \frac{4ax^3dx}{\sqrt{4x^2+2C_1}} = \int dt$$

$$= 4a\int \frac{x^3dx}{\sqrt{4x^2+2C_1}} = \int dt \Longrightarrow 4a\int \frac{x^3dx}{\sqrt{4(x^2+\frac{C_1}{2})}} = \int dt$$

$$\Longrightarrow 2a\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+\frac{C_1}{2}}} = \int dt \ . \quad \text{Haciendo:} \quad \frac{C_1}{2} = C^2$$

$$\Longrightarrow 2a\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+C^2}} = \int dt \qquad (*)$$

Aplicando la siguiente fórmula de reducción: se tiene:

$$\int \frac{u^n du}{(u^2+C^2)^{n/2}} = \frac{u^{n-1}}{(m-n+1)(u^2+C^2)^{n/2-1}} - \frac{a^2(n-1)}{m-n+1}\cdot\int \frac{u^{n-2}du}{(u^2+C^2)^{n/2}}$$

$$= 2a\left\{\frac{x^2}{3(x^2+C^2)^{-1/2}} - \frac{2C^2}{3}\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+C^2}}\right\} =$$

$$= 2a\left[\frac{x^2(x^2+C^2)^{1/2}}{3} - \frac{4C^2}{3}\sqrt{x^2+C^2}\right] \qquad (**)$$

(**) reemplazando en (*) se tiene:

$$2a\left\{\frac{x^2(x^2+C^2)^{1/2}}{3} - \frac{4C^2}{3}\sqrt{x^2+C^2}\right\} = t + C_2$$

$$= 2a(x^2+C^2)^{1/2}(x^2-4C^2) = 3(t+C_2)$$

pero: $x^2 = \sqrt{\frac{s}{a}}$;

$$\Longrightarrow = 2a\left(\sqrt{\frac{s}{a}}+C^2\right)^{1/2}\left(\sqrt{\frac{s}{a}}-4C^2\right) = 3(t+C_2)$$

$$= \frac{2a(\sqrt{s}+\sqrt{a}\,C^2)^{1/2}(\sqrt{s}-4\sqrt{a}\,C^2)}{a^{3/4}} = 3t+3C_2$$

$$= 2a^{1/4}(\sqrt{s}+\sqrt{a}\,C^2)^{1/2}(\sqrt{s}-4\sqrt{a}\,C^2) - 3C_2 = 3t$$

Haciendo: $\sqrt{a}\,C^2 = C_3$; $-3C_2 = C_4$

$$\Longrightarrow 2a^{1/4}(\sqrt{s}+C_3)^{1/2}(\sqrt{s}-4C_3) + C_4 = 3t$$

6. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{a^2}{y^2} = 0$

Solución.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a^2}{y^2} \Longrightarrow dy' = -\frac{a^2dx}{y^2}$$

multiplicando a ambos miembros por y' se tiene:

$$y'dy' = -\frac{a^2y'dx}{y^2} = -\frac{a^2dy}{y^2}$$

integrando se tiene:

$$\int y'dy' = \frac{1}{2}y'^2 = -a^2\int \frac{dy}{y^2} = \frac{a^2}{y} + C$$

$$\Longrightarrow y' = \sqrt{2}\,a\left(\frac{1}{y}+\frac{C}{a^2}\right)^{1/2} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \sqrt{2}\,a\left(\frac{1}{y}+\frac{C}{9^2}\right)^{1/2}$$

separando variable e integrando se tiene:

$$\int \frac{dy}{\left(\frac{1}{y}+\frac{C}{a^2}\right)^{1/2}} = \int a\sqrt{2}\,dx$$

Haciendo $\dfrac{C}{a^2} = C_1 \Longrightarrow$

$$= \int \frac{dy}{(\frac{1}{y} + C_1)^{1/2}} = a\sqrt{2}\int dx$$

$$= \int \frac{y^{1/2}dy}{(1 + yC_1)^{1/2}} = a\sqrt{2}\int dx$$

Haciendo $y = z^2 \Longrightarrow dy = 2zdz$

$$\Longrightarrow = \int \frac{2z^2dz}{(1 + z^2C_1)^{1/2}} = a\sqrt{2}\int dx$$

aplicando la siguiente fórmula de reducción

$$\int \frac{u^m du}{(u^2 + a^2)^{n/2}} = \frac{u^{m-1}}{(m - n + 1)(u^2 + a^2)^{n/2-1}} -$$

$$- \frac{a^2(n - 1)}{m - n + 1}\int \frac{u^{m-2}du}{(u^2 + a^2)^{n/2}}$$

$$= z(z^2C + 1)^{1/2} - \int \frac{dz}{(1 + z^2C_1)^{1/2}} = a\sqrt{2}\,x + C_2$$

$$= z(z^2C + 1)^{1/2} - \frac{1}{\sqrt{C_1}}\int \frac{d(\sqrt{C_1}z)}{(1 + (\sqrt{C_1}z)^2)^{1/2}} = a\sqrt{2}\,x + C_2$$

$$= z(z^2C + 1)^{1/2} - \frac{1}{\sqrt{C_1}}\ln(\sqrt{C_1}z + \sqrt{1 + C_1z^2}) = a\sqrt{2}\,x + C_2$$

pero: $z^2 = y \Longrightarrow z = \sqrt{y}$

$$= (y)^{1/2}(y^{1/2}C_1 + 1)^{1/2} - \frac{1}{\sqrt{C_1}}\ln(\sqrt{C_1y} + \sqrt{1 + C_1y}) = a\sqrt{2}\,x + C_2$$

$$= (y^2C_1 + y)^{1/2} - \frac{1}{\sqrt{C_1}}\ln(\sqrt{C_1y} + \sqrt{1 + C_1y}) = a\sqrt{2}\,x + C_2$$

7. $\frac{d^3y}{dx^3} = x + \operatorname{sen} x$

Solución

multiplicando ambos miembros por dx e integrando se tiene:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int \frac{d^3y}{dx^3}dx = \int xdx + \int \operatorname{sen}xdx$$

$$\Longrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x^2}{2} - \cos x + C_1$$

repitiendo el procedimiento se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \int \frac{x^2}{2}dx - \int \cos xdx + C_1\int dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{6}x^3 - \operatorname{sen}x + C_1x + C_2$$

Finalmente se tiene:

$$y = \frac{1}{6}\int x^3dx - \int \operatorname{sen}xdx + C_1\int xdx + C_2\int dx$$

$$y = \frac{1}{24}x^4 + \cos x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$$

8. $\frac{d^2y}{dx^2} = 4y$

Solución.

$dy' = 4ydx$, multiplicando por y' a ambos miembros se tiene:

$$y'dy' = 4y.y'dx = 4ydy$$

integrando:

$$\frac{1}{2}y'^2 = 2y^2 + C \Longrightarrow y' = \sqrt{4y^2 + 2C} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \sqrt{4y^2 + 2C}$$

separando variable e integrando:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + \frac{C}{2}}} = \int 2dx$$

Haciendo $\frac{C}{2} = C_1$ se tiene

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + C_1}} = 2\int dx \Longrightarrow \ln(y + \sqrt{y^2 + C_1}) = 2x + C_2$$

tomando exponenciales a ambos miembros se tiene:

$$y + \sqrt{y^2 + C_1} = e^{(2x+C_2)}.$$

$$\Longrightarrow \quad y = \frac{1}{2}\, e^{C_2} e^{2x} - \frac{C_1}{2}\, e^{-C_2}, e^{-2x} = C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x}$$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES

Son las ecuaciones de la forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\,\frac{dy}{dx} + qy = 0 \qquad (1)$$

TEOREMA. Toda ecuación diferencial lineal con coeficientes constante tiene por solución una función exponencial.

Sea: $y = e^{nx}$ una solución de (1)

$\Longrightarrow$ derivando: se tiene:

$$\frac{dv}{dx} = ne^{nx} \;;\quad \frac{d^2y}{dx^2} = n^2 e^{nx} \;; \qquad (2)$$

reemplazamos (2) en (1) para determinar los valores de n:

$$= n^2 e^{nx} + pne^{nx} + q\, e^{nx} = e^{nx}(n^2 + pn + q) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad e^{nx} \neq 0 \quad , \quad \forall\, n,\ x \in \mathbb{R}$$

$$n^2 + pn + q = 0 \qquad (3) \quad \text{Ecuación auxiliar.}$$

$\therefore$ $y = e^{nx}$ es la solución particular de (1) si n es una raíz de esta ecuación de 2do grado.

CASO I. La ecuación (3) tiene raíces distintas, n_1, n_2; $\Longrightarrow$

$y = e^{n_1 x}$; $y = e^{n_2 x}$ son soluciones particulares de (1) y la solución general será:

$$y = C_1 e^{n_1 x} + C_2 e^{n_2 x} \qquad (4)$$

CASO II: Las raíces de la ecuación (3) son imaginarias.

es decir si: $n_1 = a + b\sqrt{-1} = a + b_i$

$\Longrightarrow$ $n_2 = a - b\sqrt{-1} = a - b_i$, que es la conjugada de n_i es también raíz de (3)

$$\Longrightarrow \quad e^{n_1 x} = e^{(a+b_i)x} = e^{ax}.e^{ibx}$$

$$e^{n_2 x} = e^{(a-b_i)x} = e^{ax}.e^{-ibx}$$

asimismo por álgebra se sabe que:

$$e^{ibx} = \cos bx - i\,\mathrm{sen}\,bx, \quad \text{y además}$$

$$\frac{1}{2}\,(e^{ibx} + e^{-ibx}) = \cos bx \;;$$

$$\frac{1}{2i}\,(e^{ibx} - e^{-ibx}) = \mathrm{sen}\,bx$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{2}\,(e^{ax}.e^{-ibx} + e^{ax}.e^{-ibx}) = e^{ax}.\,\frac{1}{2}\,(e^{ibx} + e^{-ibx})$$

$$= e^{ax}\cos bx;$$

$$\frac{1}{2}(e^{ax}.e^{ibx} - e^{ax}e^{-ibx}) = e^{ax}.\,\frac{1}{2}\,(e^{ibx} - e^{-ibx}) =$$

$$= e^{ax}\mathrm{sen}\,bx$$

$\Longrightarrow$ $e^{ax}\cos bx$, $e^{ax}\mathrm{sen}\,bx$ son soluciones particulares y la solución general será:

$$y = C_1 e^{ax}\cos bx + C_1 e^{ax}\mathrm{sen}\,bx$$

CASO III: Las raíces de la ecuación (3) son reales e iguales: las raíces de la ecuación (3) serán iguales si $p^2 = 4q$, $\Longrightarrow$ la ecuación (3) puede escribirse:

$$n^2 + pn + \frac{1}{4}\,p^2 = (n + \frac{1}{2}\,p)^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \text{las raíces serán:} \quad n_1 = n_2 = -\frac{1}{2}\,p$$

Entonces las soluciones particulares serán:

$$y = e^{n_1 x}, \quad y = xe^{n_2 x}$$

y la solución general será:

$$y = C_1 e^{n_1 x} + C_2 x e^{n_2 x}$$

PROBLEMAS

Hallar la solución general de cada una de las ecuaciones dife - renciales.

1. $\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 0$

Solución.

Sea: $x = e^{rt}$ una solución de la ecuación:

$\Longrightarrow \frac{dx}{dt} = re^{rt}$; $\frac{d^2x}{dt} = r^2e^{rt}$ (*)

reemplazando (*) en la ecuación diferencial se tiene:

$r^2e^{rt} - re^{rt} - 2e^{rt} = e^{rt}(r^2 - r - 2) = 0$

$\Longrightarrow e^{rt} \neq 0$, $\forall r,t \in R$

$\Longrightarrow r^2 - r - 2 = (r - 2)(r + 1) = 0 \Longrightarrow r_1 = 2, r_2 = -1$

$\Longrightarrow r_1 = 2 \Longrightarrow y = e^{2t}$

$r_2 = -1 \Longrightarrow y = e^{-t}$ que son las soluciones particulares.

∴ La solución general será:

$$y = C_1e^{-t} + C_2e^{2t}$$

2. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = 0$

Sea: $y = e^{rx}$ una solución de la ecuación.

$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = re^{rx}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = r^2e^{rx}$ (*)

reemplazando (*) en la ecuación diferencial:

$= r^2e^{rx} - 4re^{rx} + 3e^{rx} = e^{rx}(r^2 - 4r + 3) = 0$

$\Longrightarrow e^{rx} \neq 0$, $\forall r, t \in \mathbb{R}$

∴ $r^2 - 4r + 3 = 0 \Longrightarrow (r - 3)(r - 1) = 0$

$\Longrightarrow r_1 = 3 \Longrightarrow y = e^{3x}$

$r_2 = 1 \Longrightarrow y = e^{x}$

∴ La solución general será: $y = C_1e^{x} + C_2e^{3x}$

3. $\frac{d^2s}{dt^2} - \frac{2ds}{dt} + s = 0$

Sea: $s = e^{rt}$ la solución de la ecuación diferencial:

$\Longrightarrow \frac{ds}{dt} = re^{rt}$; $\frac{d^2s}{dt^2} = r^2e^{rt}$. (*)

reemplazando (*) en la ecuación.

$= r^2e^{rt} - 2re^{rt} + e^{rt} = e^{rt}(r^2 - 2r + 1) = 0$

$\Longrightarrow e^{rt} \neq 0$, $\forall r,t \in \mathbb{R}$

∴ $r^2 - 2r + 1 = (r - 1)^2 = 0 \Longrightarrow r_1 = r_2 = 1$

$\Longrightarrow$ La solución particular es: e^t; te^t.

∴ La solución general será:

$$s = Ce^t + t_2te^t$$

4. $\frac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0$

Sea: $x = e^{rt}$ una solución de la ecuación:

$\Longrightarrow \frac{dx}{dt} = re^{rt}$; $\frac{d^2x}{dt^2} = r^2e^{rt}$ (*)

reemplazando (*) en la ecuación se tiene:

$= (r^2 + 16)e^{rt} = 0$

$\Longrightarrow e^{rt} \neq 0 \Longrightarrow r^2 + 16 = 0 \Longrightarrow r_1 = 4i;\ r_2 = -4i$

$\Longrightarrow r_1 = 4i \Longrightarrow x = e^{i4t}$; $r_2 = -4i \Longrightarrow x = e^{-i4t}$

$\Longrightarrow y = \frac{1}{2}(e^{t4i} + e^{-t4i}) = \cos 4t$

$y = \frac{1}{2}(e^{t4i} - e^{-t4i}) = \text{sen}4t$

$\Longrightarrow$ la solución general será:

$$y = C_1\cos 4t + C_2\operatorname{sen} 4t$$

5. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} = 0$

Sea $y = e^{rx}$ una solución de la ecuación:

$\Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = re^{rx}$; $\dfrac{d^2y}{dx^2} = r^2e^{rx}$ (*)

reemplazando (*) en la ecuación

$= e^{rx}(r^2 + 4r) = 0 \Longrightarrow e^{rx} \neq 0$, $\forall x, r \in \mathbb{R}$

$\therefore$ $r(r + 4) = 0 \Longrightarrow r_1 = 0 \Longrightarrow y = e^{0} = 1$

$r_2 = -4 \Longrightarrow y = e^{-4x}$

$\Longrightarrow$ La solución general será: $y = C_1 + C_2e^{-4x}$

6. $\dfrac{d^2s}{dt^2} - \dfrac{2\,ds}{dt} + 5s = 0$

Sea: $s = e^{rt}$ una solución de la ecuación:

$\Longrightarrow \dfrac{ds}{dt} = re^{rt}$; $\dfrac{d^2s}{dt^2} = r^2e^{rt}$ (*)

reemplazando (*) en la ecuación se tiene:

$= e^{rt}(r^2 - 2r + 5) = 0$

$\Longrightarrow e^{rt} \neq 0$, $\forall r,t \in \mathbb{R}$

$\therefore$ $r^2 - 2r + 5 = [r - (1 + 2i)][r - (1 - 2i)] = 0$

$\Longrightarrow r_1 = 1 + 2i \Longrightarrow s = e^{t(1+2i)}$

$r_2 = 1 - 2i \Longrightarrow s = e^{t(1-2i)}$

$\Longrightarrow \frac{1}{2}(e^{t(1+2i)} + e^{t(1-2i)}) = e^{t}\cos 2t$ y

$\frac{1}{2i}(e^{t(1+2i)} - e^{t(1-2i)}) = e^{t}\operatorname{sen} 2t$

$\Longrightarrow$ La solución general será:

$$s = C_1e^{t}\cos 2t + C_2e^{t}\operatorname{sen} 2t = e^{t}(C_1\cos 2t + C_2\operatorname{sen} 2t)$$

7. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} + 9y = 0$

Sea: $y = e^{rx}$ una solución de la ecuación:

$\Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = re^{rx}$; $\dfrac{d^2y}{dx^2} = r^2e^{rx}$ (*)

reemplazando (*) en la ecuación se tiene:

$= e^{rx}(r^2 + 6r + 9) = 0 \Longrightarrow e^{rx} \neq 0$, $\forall x, r \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow r^2 + 6r + 9 = (r + 3)(r + 3) = (r + 3)^2 = 0$

$\Longrightarrow y = e^{3x}$; $y = xe^{3x}$ son soluciones particulares

$\Longrightarrow$ La solución general será:

$$y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} = e^{3x}(C_1 + C_2x)$$

8. $\dfrac{d^2s}{dt^2} + 3s = 0$

$\Longrightarrow s = e^{rt}$ una solución de la ecuación

$\Longrightarrow \dfrac{ds}{dt} = re^{rt}$; $\dfrac{d^2s}{dt^2} = r^2e^{rt}$ (*)

reemplazando (*) en la ecuación se tiene:

$e^{rt}(r^2 + 3) = 0 \Longrightarrow e^{rt} \neq 0$, $\forall r, t \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow r^2 + 3 = 0 \Longrightarrow$

$r_1 = i\sqrt{3} \Longrightarrow s = \cos\sqrt{3}x$

$r_2 = -i\sqrt{3} \Longrightarrow s = \operatorname{sen}\sqrt{3}x$

$\Longrightarrow$ la solución general es:

$$y = C_1\cos\sqrt{3}\,x + C_2\operatorname{sen}\sqrt{3}\,x$$

9. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - n\dfrac{dy}{dx} = 0$

$\Longrightarrow$ la ecuación característica es:

$r^2 - nr = 0$ donde $e^{rx} \neq 0$, $\forall r,x \in \mathbb{R}$

$= r(r - n) = 0$

$\Longrightarrow r_1 = 0 \Longrightarrow y = e^{0} = 1$; $r_2 = n \Longrightarrow y = e^{nx}$

$\Longrightarrow$ la solución general será:

$$y = C_1 + C_2 e^{nx}$$

10. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\dfrac{dx}{dt} + 10x = 0 \Longrightarrow$ la ecuación auxiliar es:

$\Longrightarrow$ la ecuación auxiliar es:

$$r^2 + 2r + 10 = [r - (-1 + 3i)][r - (-1 - 3i)]\ 0$$

$\Longrightarrow r_1 = -1 + 3i \Longrightarrow x = e^{(-1-3i)t}$

$\Longrightarrow r_2 = -1 - 3i \Longrightarrow x = e^{(-1-3i)t}$

$$x = e^{-t}\frac{1}{2}(e^{3i} - e^{3i}) = e^{-t}\text{sen}3t$$

$\Longrightarrow$ la solución general es

$$x = C_1e^{-t}\cos 3t + C_2e^{-t}\text{sen}3t \quad .$$

En los siguientes problemas hallar la solución particular Q' satisface las condiciones dadas.

11. $\dfrac{d^2s}{dt^2} + 3\dfrac{ds}{dt} + 25 = 0$; $s = 0$, $\dfrac{ds}{dt} = 1$ cuando $t = 0$

La ecuación auxiliar es:

$$r^2 + 3r + 2 = (r + 2)(r + 1) = 0$$

$\Longrightarrow r_1 = -2 \Longrightarrow s = e^{-2t}$

$r_2 = -1 \Longrightarrow s = e^{-t}$

$\Longrightarrow$ la solución general será:

$$S = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t} \qquad (*)$$

para hallar la solución particular: determinamos el valor de C_1, C_2 imponiendo las condiciones dadas en (*)

$\Longrightarrow C_1 + C_2 = 0 \qquad (1)$

derivando (*) $\dfrac{ds}{dt} = -C_1e^{-t} - 2C_2e^{-2t}$

$$1 = -C_1 - 2C_2 \qquad (2)$$

de (1) y (2): $\quad C_1 + C_2 = 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \Longrightarrow C_1 = 1,\ C_2 = -1$

$\qquad -C_1 - 2C_2 = 1$

$\Longrightarrow$ la solución particular es:

$$S = e^{-t} - e^{-2t}$$

12. $\dfrac{d^2x}{dt^2} - n^2x = 0$, $x = 2$, $\dfrac{dx}{dt} = 0$, cuando $t = 0$

la ecuación auxiliar es:

$r^2 - n^2 \Longrightarrow 0 \Longrightarrow (r^2 - n^2) = 0 \quad (r-n)(r + n) = 0$

$r_1 = n \Longrightarrow x = e^{nt}$

$r_2 = -n \Longrightarrow x = e^{-nt}$

$\Longrightarrow$ la solución general es: $\quad x = C_1e^{nt} + C_2e^{-nt} \qquad (*)$

imponiendo las condiciones dadas en (*) se tiene: los valores de C_1, C_2

$\therefore C_1 + C_2 = 2 \qquad (1)$

derivando (*) tenemos: $\quad \dfrac{dx}{dt} = nC_1e^{nt} - nC_2e^{nt} =$

$= nC_1 - nC_2 = 0 \Longrightarrow C_1 - C_2 = 0 \qquad (2)$

de (1) y (2) se tiene:

$\qquad C_1 + C_2 = 2$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \Longrightarrow C_1 = 1,\ C_2 = 1$

$\qquad C_1 - C_2 = 0$

$\Longrightarrow$ la solución particular será: $\quad x = e^{nt} + e^{-nt}$

13. $\dfrac{d^2s}{dt^2} - 8\dfrac{ds}{dt} + 16s = 0$; $s = 0$, $\dfrac{ds}{dt} = 1$, cuando $t = 0$

La ecuación auxiliar es:

$$r^2 - 8r + 16 = (r - 4)^2$$

$\Longrightarrow s_1 = e^{4t}$

$\qquad s = te^{4t}$

$\Longrightarrow$ la solución general será:

$s = e^{4t}(C_1 + tC_2)$ $(*)$

derivando $(*)$ $\Longrightarrow \frac{ds}{dt} = e^{4t}(C_1 + C_2 + 4tC_2)$ $(**)$

imponiendo las condiciones dadas a $(*)$, $(**)$ para hallar los valores de C_1, C_2 se tiene: $C_1 = 0$; $C_2 = 1$

$\Longrightarrow$ la solución particular será: $s = te^{4t}$

14. $\frac{d^2s}{dt^2} + 8\frac{ds}{dt} + 25s = 0$. $s = 4$, $\frac{ds}{dt} = -16$ cuando $t = 0$

$\Longrightarrow$ la ecuación auxiliar es:

$r^2 + 8r + 25 = [r - (-4 + 3i)][r - (-4 - 3i)] = 0$

$\Longrightarrow r_1 = -4 + 3i \Longrightarrow s = e^{-4t}.e^{+3t} = e^{-4t}\cos 3t$

$r_2 = -4 - 3i \Longrightarrow s = e^{-4t}.e^{-i3t} = e^{-4t}\text{sen}3t$

$\Longrightarrow$ la solución general será:

$s = e^{-4t}(C_1\cos 3t + C_2\text{sen}3t)$ $(*)$

derivando $(*)$

$\frac{ds}{dt} = e^{-4t}\{C_1(-3\text{sen}3t - 4\cos 3t) + C_2(3\cos 3t - 4\text{sen}3t)\}$ $(**)$

imponiendo las condiciones dadas en $(*)$, $(**)$ se tiene:

para $C_1 = 4$, $C_2 = 0$

$\Longrightarrow$ la solución particular será: $s = 4e^{-4t}\cos 3t$

15. $\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 10x = 0$ $x = 1$, $\frac{dx}{dt} = 4$ cuando $t = 0$

la ecuación auxiliar es:

$r^2 - 6r + 10 = [r - (3 + i)][r - (3 - i)] = 0$

$\Longrightarrow r_1 = 3 + i \Longrightarrow x = e^{3t}.e^{it} \Longrightarrow e^{3t}\cos t$

$r_2 = 3 - i \Longrightarrow x = e^{3t}.e^{-it}$ $e^{3t}\text{sen}t$

$\Longrightarrow$ la solución general es:

$x = e_1^{3t}(C_1\cos t + C_2\text{sen}t)$ $(*)$

derivando $(*)$ $\frac{dx}{dt} = e^{3t}\{C_1(-\text{sen}t + 3\cos t) + C_2(\cos t + 3\text{sen}t)\}$

..... $(**)$

imponiendo las condiciones dadas, en $(*)$; $(**)$ se tiene:

para $C_1 = 1$, $C_2 = 1$

$\Longrightarrow$ la solución particular es: $x = e^{3t}(\cos t + \text{sen}t)$

16. $\frac{d^2x}{dt^2} - 4x = 0$; $x = 10$, $\frac{dx}{dt} = 0$ cuando $t = 0$

la ecuación auxiliar es: $r^2 - 4 = (r - 2)(r + 2) = 0$

$\Longrightarrow r_1 = 2 \Longrightarrow x = e^{2t}$; $r_2 = -2 \Longrightarrow x = e^{-2t}$

$\Longrightarrow$ la solución general será:

$x = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t}$ $(**)$

imponiendo las condiciones en $(**)$, $(*)$ se tiene:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 10 \\ 2C_1 - 2C_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow C_1 = 5,\ C_2 = 5$$

$\therefore$ la solución particular será:

$x = 5e^{2t} + 5e^{-2t}$

17. $\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0$; $x = 2$, $\frac{dx}{dt} = 5$ cuando $t = 0$

la ecuación auxiliar es:

$r^2 - 4r - 4 = (r - 2)^2 = 0$

$\Longrightarrow r_1 = e^{2t}$; $r_2 = te^{2t}$

$\Longrightarrow$ la solución general será:

$x = C_1e^{2t} + C_2te^{2t}$ $(*)$

derivando $(*)$ $\frac{dx}{dt} = e^{2t}(2C_1 + 2tC_2 + C_2)$ $(**)$

imponiendo las condiciones dadas en $(*)$; $(**)$ se tiene:

$C_1 = 2$; $C_2 = 1$

∴ la solución particular es:

$$x = 2e^{2t} + te^{2t} = e^{2t}(2 + t)$$

18. $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 4\dfrac{dx}{dt} + 13x = 0$; $x = 2,\ \dfrac{dx}{dt} = 4$, cuando $t = 0$

la ecuación auxiliar es:

$$r^2 - 4r + 13 = [r - (2 + 3i)][r - (2 - 3i)] = 0$$

$\Longrightarrow\ r_1 = 2 + 3i \Longrightarrow x = e^{2t}, e^{i3t} \Longrightarrow x = e^{2t}\cos 3t$

$\quad\ \ r_2 = 2 - 3i \Longrightarrow x = e^{2t}.e^{-i3t} \Longrightarrow x = e^{2t}\,sen 3t$

$\Longrightarrow$ la solución general es:

$$x = e^{2t}(C_1\cos 3t + C_2\,sen 3t) \qquad (*)$$

derivando (*) se tiene:

$$\frac{dx}{dt} = e^{2t}\{C_1(-3sen3t + 2\cos 3t) + C_2(3\cos 3t + 2sen3t)\} \qquad \ldots\ (**)$$

imponiendo las condiciones dadas, en (*), (**) se tiene: $C_1 = 2,\ C_2 = 0$

$\Longrightarrow$ la solución particular: $\quad x = 2e^{2t}\cos 3t$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE LA FORMA

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dx}{dx} + qy = R(x) \qquad (1)$$

donde p, q son constantes; R(x) es una función de la variable independiente x ó una constante.

Los pasos para resolver (1) son:

I) Resolver la ecuación: $\dfrac{d^2y}{dx^2} + p\dfrac{dy}{dx} + qy = 0$

Sea la solución general.

$$y = V$$

La función V denominamos función complementaria de (1) lo denotamos: y_c.

II) Determinar una solución particular de (1) a la que designamos como y_p (ver cuadro) sea esta solución. $y_p = U$

III) La solución general de (1) será la suma de: LA FUNCION COMPLEMENTARIA MAS SOLUCION PARTICULAR es decir: $y_g = U + V = y_c + y_p$

PARA DETERMINAR UNA SOLUCION PARTICULAR (YP) UTILIZAR EL SIGTE CUADRO SINOPTICO.

Nº Orden	2º Miembro de la Ec. Diferen	Raíces de la Ecuación Auxiliar	Forma de la Solución Particular: $k = \max(m,n)$
I	$P_n(x)$	1) El número 0 no es raíz de la Ec. auxiliar 2) El número 0 es raíz de la ec. auxiliar de orden s.	$\tilde{P}_n(x)$ $x^s\tilde{P}_n(x)$
II	$P_n(x)e^{\alpha x}$; $\alpha \in R$	1) El número α no es raíz de la ecuación auxiliar 2) El número α es raíz de la ecuación auxiliar de orden s	$\tilde{P}(x)e^{\alpha x}$ $x^s\tilde{P}_m(x)\,e^{\alpha x}$
III	$P_n(x)\cos\beta x + Q_n(x)\,sen\beta x$	1) El número ±iβ no es raíz de la ecuación auxiliar 2) El número ±iβ es raíz de la ec. auxiliar de orden s	$\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\,sen\beta x$ $x^s(\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\,sen\beta x)$
IV	$e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\,sen\beta x)$	1) El número α±βi no son raíces de la ec. auxiliar 2) El número α±βi son raíces de la ecuación auxiliar de orden s	$e^{\alpha x}(\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\,sen\beta x)$ $x^s e^{\alpha x}(\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\,sen\beta x)$

PROBLEMAS

Hallar la solución general de c/u de las siguientes ecuaciones diferencial

1. $\frac{d^2x}{dt^2} + x = at + b$ (1)

Solución

1º $\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$ (2)

$\Longrightarrow$ la ecuación auxiliar de (2) será:

$r^2 + 1 = 0 \Longrightarrow r_1 = i \Longrightarrow x = e^{it} \Longrightarrow x = \cos t$

$r_2 = -i \Longrightarrow x = e^{-it} \Longrightarrow x = \operatorname{sen} t$

$\Longrightarrow$ la solución complementaria es:

$$x_c = C_1\cos t + C_2\operatorname{sen} t \quad (3)$$

2º El 0 no es raíz de la ecuación auxiliar $\Longrightarrow$ la forma de la ecuación particular es:

$$x_p = A_t + B \quad (4)$$

derivando (4) se tiene:

$$\frac{dx}{dt} = A \; ; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad (5)$$

reemplazando (5) en (1) se tiene: $A_t + B = at + b$

igualando los coeficientes se tiene:

$A = a$

$B = b$

$\Longrightarrow x_p = at + b$

3º luego la solución general será:

$$x_3 = x_c + x_p = C_1\cos t + C_2\operatorname{sen} t + at + b$$

2. $\frac{d^2x}{dt^2} \neq x = 4\cos t$ (1)

1º $\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0 \Longrightarrow$ la ecuación auxiliar es:

$r^2 + 1 = 0 \Longrightarrow r_1 = i, \Longrightarrow x = e^{it} \Longrightarrow x = \cos t$

$r_2 = -i \Longrightarrow x = e^{-it} \Longrightarrow x = \operatorname{sen} t$

la solución complementaria es:

$$x_c = C_1\cos t + C_2\operatorname{sen} t \quad (2)$$

2º El número $\pm iB = \pm i$ es raíz de la ecuación auxiliar de orden 1

$\Longrightarrow$ la forma de la ecuación particular es:

$$x_p = t(A\cos t + B\operatorname{sen} t) \quad (3)$$

derivando: $\frac{dx}{dt} = A\cos t + B\operatorname{sen} t - t(A\operatorname{sen} t - B\cos t)$ (4)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\operatorname{sen} t + B\cos t - A\operatorname{sen} t + B\cos t - t(A\cos t + B\operatorname{sen} t) \quad (5)$$

reemplazando (5), (3) en (1) se tiene:

$= -2A\operatorname{sen} t + 2B\cos t - t(A\cos t + B\operatorname{sen} t) + t(A\cos t + B\operatorname{sen} t) = 4\cos t$

$= -2A\operatorname{sen} t + 2B\cos t = 4\cos t$

Esta ecuación se convierte en una identidad cuando:

$A = 0$; $B = 2$; sustituyendo en (3) se tiene:

$$x_p = 2t\operatorname{sen} t$$

3º $\therefore$ la solución general es:

$$x_g = x_c + x_p = C_1\cos t + C_2\operatorname{sen} t + 2t\operatorname{sen} t$$

3. $\frac{d^2x}{dt^2} + x = 4\operatorname{sen}2t$ (1)

Solución.

La solución complementaria es por el ejercicio (1) de la siguiente manera $x_c = C_1\cos t + C_2\operatorname{sen} t$ (2)

El número $\pm 2i$ no es raíz de la ecuación auxiliar, $\Longrightarrow$ la forma de la solución particular es

$$x_p = A\cos 2t + B\operatorname{sen}2t \quad (3)$$

derivando (3) se tiene:

$$\frac{dx}{dt} = -2A\operatorname{sen}2t + 2B\cos 2t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -4A\cos 2t - 4A\operatorname{sen}2t \quad (4)$$

sustituyendo (4), (3) en (1) se tiene:

$= -4A\cos 2t - 4B\text{sen}2t + A\cos 2t + B\text{sen}2t = 4\ \text{sen}2t$

$= -3A\cos 2t - 3B\text{sen}2t = 4\text{sen}2t$

igualando los coeficientes de la identidad se tiene:

$A = 0$; $B = -\frac{4}{3}$ sustituyendo en (3) se tiene:

$$x_p = -\frac{4}{3}\ \text{sen}\ 2t \qquad (5)$$

de (5), (2) se tiene la solución general:

$$x_g = C_1\cos t + C_2\text{sen}t - \frac{4}{3}\text{sen}2t$$

4. $\frac{d^2s}{dt^2} - 4s = 2e^t \qquad (1)$

La ecuación auxiliar de: $\frac{d^2s}{dt^2} - 4s = 0$ es:

$r^2 - 4 = 0 \implies r_1 = 2 \implies x = e^{2t}$

$r_2 = -2 \implies x = e^{-2t}$

$\implies$ la solución complementaria es:

El número $\alpha = 1$ no es raíz de la ecuación auxiliar, entonces la forma de la ecuación auxiliar es:

$$s_p = A_1e^t \qquad (3)$$

derivando (3) se tiene: $\frac{ds}{dt} = Ae^t$; $\frac{d^2s}{dt^2} = A_1e^t \qquad (4)$

(4) y (3) sustituyendo en (1) se tiene:

$$Ae^t - 4Ae^t = 2e^t \implies -3Ae^t = 2e^t$$

igualando los coeficientes se tiene para $A = -\frac{2}{3}$ y sustituyendo en (3) se tiene $s_p = -\frac{2}{3}e^t \quad (5)$

sumando (5) y (2) se tiene la solución general.

$$s_g = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t} - \frac{2}{3}e^t$$

(5) $\frac{d^2s}{dt^2} - 4s = 2\cos 2t \quad \ldots (1)$

$\implies$ según, ejercicio (4) la solución complementaria es:

$$s_c = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t} \quad \ldots. \quad (2)$$

2º Como el número $\pm 2i$ no es raíz de la ecuación auxiliar

$\implies$ la forma de la solución particular es:

$$s_p = A\cos 2t + B\text{sen}2t \qquad (3)$$

derivando (3):

$$\frac{ds}{dt} = -2A\text{sen}2t + 2B\cos 2t$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -4A\cos 2t - 4B\text{sen}2t \qquad (4)$$

sustituyendo (4) y (3) en (1) se tiene:

$$= -8A\cos 2t - 8B\text{sen}2t = 2\cos 2t$$

igualando los coeficientes de esta identidad se tiene:

$B = 0$, $A = -\frac{1}{4}$ y sustituyendo en (3) obtenemos la solución particular

$$s_p = -\frac{1}{4}\cos 2t \qquad (5)$$

sumando (5) y (2) se tiene la solución general

$$s_g = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t} = \frac{1}{4}\cos 2t$$

6. $\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 4t \qquad (1)$

1º $\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 0$

$\implies$ la ecuación auxiliar es:

$r^2 - r - 2 = 0 = (r-2)(r+1) = 0$

$\implies r_1 = 2 \implies x = e^{2t}$

$r_2 = -1 \implies x = e^{-t}$

$\implies$ la solución complementaria es:

$$x_c = C_1e^{2t} + C_2\ e^{-t} \qquad (2)$$

2º El número cero (0) no es raíz de la ecuación auxiliar entonces la forma de la solución particular será:

$$x_p = A_t + B \qquad (3)$$

derivando (3) $\frac{dx}{dt} = A$; $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$ (4)

sustituyendo (4) y (3) en (1) se tiene:

$$= -2At - A - 2B = 4t$$

igualando coeficientes de la misma potencia se tiene para

$A = -2$, $B = 1$ y sustituyendo en (3) tenemos

$$x_p = 1 - 2t \qquad (5)$$

3ª sumando (5) y (2) se tiene:

$$x_g = C_1e^{2t} + C_2e^{-t} + 1 - 2t$$

7. $\frac{d^2s}{dt^2} + 2\frac{ds}{dt} + 2s = 8e^{2t}$.

1ª $\frac{d^2s}{dt^2} + 2\frac{ds}{dt} + 2s = 0$ (1)

$\Longrightarrow$ la ecuación auxiliar será:

$r^2 + 2r + 2 = 0 \quad = [r - (-1+i)][r - (-1-i)] = 0$

$\Longrightarrow r_1 = -1 + i \Longrightarrow x = e^{-t}.e^{i}$ $\qquad\Longrightarrow\qquad$ $x = e^{-t}\cos t$

$r_2 = -1 - i \Longrightarrow x = e^{-t}.e^{-i}$ $\qquad\qquad$ $x = e^{-t}\operatorname{sen} t$

$\therefore$ la solución complementaria será:

$$s_c = e^{-t}(C_1\cos t + C_2\operatorname{sen} t) \quad .... \quad (2)$$

2ª El número 2 no es raíz de la ecuación auxiliar, entonces la forma de la solución particular será.

$$s_p = Ae^{2t} \quad .... \quad (3)$$

derivando (3). $\frac{ds}{dt} = 2Ae^{2t}$; $\frac{d^2s}{dt^2} = 4Ae^{2t}$ ... (4)

(4) y (3) sustituyendo en (1) se tiene:

$10Ae^{2t} = 8e^{2t}$; igualando los coeficientes se tiene para

$A = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$; sustituyendo éste en (3) se tiene:

$$s_p = \frac{4}{5}e^{2t}$$

3ª $\therefore$ la solución general será:

$$s_i = s_c + s_p = e_1^{-t}(C_1\cos t + C_2\operatorname{sen} t) + \frac{4}{5}e^{2t}$$

8. $\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + 5y = 3\cos t$

1ª $\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + 5y = 0$ (1)

$\Longrightarrow$ la ecuación auxiliar de (1) es:

$r^2 - 2r + 5 = 0 \Longrightarrow [r - (1+2i)][r - (1-2i)] = 0$

$r_1 = (1+2i) \Longrightarrow x = e^{t}.e^{-2i}$ $\qquad\Longrightarrow\qquad$ $x = e^{t}\cos 2t$

$r_2 = (1-2i) \Longrightarrow x = e^{t}.e^{-2i}$ $\qquad\qquad$ $x = e^{t}\operatorname{sen} 2t$

$\Longrightarrow$ la solución complementaria será:

$$x_c = e_1^{t}(C_1\cos 2t + C_2\operatorname{sen} 2t) \qquad (2)$$

2°) El número $\pm i$ no es raíz de la ecuación auxiliar, por lo tanto la forma de la solución particular es:

$$x_p = A\cos t + B\operatorname{sen} t \qquad (3)$$

derivando (3):

$$\frac{dx}{dt} = -A\operatorname{sen} t + B\cos t \quad .... \quad (4)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\cos t - B\operatorname{sen} t \quad .... \quad (5)$$

(3); (4) y (5) sustituyendo en la ecuación original se tiene:

$(4A - 2B)\cos t + (4B + 2A)\operatorname{sen} t = 3\cos t$

igualando los coeficientes de esta identidad se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} 4A - 2B = 3 \\ 2A + 4B = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow A = \frac{3}{5}; \quad B = -\frac{3}{10}$$

sustituyendo estos valores en (3) se tiene:

$$x_p = \frac{3}{5}\cos t - \frac{3}{10}\operatorname{sen} t \quad ... \quad (6)$$

3ª sumando (6) y (2) se tiene:

$$x_g = e^t(C_1\cos t + C_2\operatorname{sen}t) + \frac{3}{5}\cos t - \frac{3}{10}\operatorname{sen}t.$$

9. $\frac{d^2s}{dt^2} + 9s = 3\cos 2t$ ... (1)

1ª $\frac{d^2s}{dt^2} + 9s = 0 \implies$ (2)

La ecuación auxiliar de (2) será:

$$r^2 + 9 = 0 \implies (r + 3i)(r - 3i) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = 3r \implies s = e^{3i} \\ r_2 = -3i \implies s = e^{-3i} \end{array}\right\} \implies \begin{array}{l} s = \cos 3t \\ s = \operatorname{sen}3t \end{array}$$

$\implies$ la solución complementaria es:

$$s_c = C_1\cos 3t + C_2\operatorname{sen}3t \quad \ldots \quad (3)$$

2ª El número ± 2i no es raíz de la ecuación auxiliar; por lo tanto la forma de la solución particular será:

$$s_p = A\cos 2t + B\operatorname{sen}2t \quad \ldots. \quad (4)$$

derivando (4):

$$\frac{ds}{dt} = -2A\operatorname{sen}2t + 2B\cos 2t$$

$$\frac{ds}{dt^2} = -4A\cos 2t = 4B\operatorname{sen}2t \quad \ldots (5)$$

sustituyendo (4), (5) en (1) se tiene:

$$= 5A\cos 2t + 5B\operatorname{sen}2t = 3\cos 2t$$

igualando los coeficientes de la identidad se tiene:

para: $A = \frac{3}{5}$, $B = 0$ y sustituyendo en (3)

$$s_p = \frac{3}{5}\cos 2t \quad \ldots. \quad (6)$$

Se sumando (6), (3) se tiene la solución general

$$s_g = C_1\cos 2t + C_2\operatorname{sen}2t + \frac{3}{5}\cos 2t$$

10. $\frac{d^2y}{dt^2} - y = 2 + e^t$ ...... (1)

1ª $\frac{d^2s}{dt^2} - y = 0$ ... (2)

la ecuación auxiliar de (2) será:

$$r^2 - 1 = (r - 1)(r + 1) = 0$$

$$r_1 = 1 \implies s = e^t$$

$$r_2 = -1 \implies s = e^{-t}$$

$\implies$ la solución complementaria será:

$$s_c = C_1e^t + C_2e^{-t} \quad \ldots. \quad (3)$$

2ª El Nº 1 es raíz de la ecuación auxiliar de orden 1; por lo tanto la forma de la solución particular es:

$$s_p = A + 3te^t \quad \ldots. \quad (4)$$

derivando (4) se tiene:

$$\frac{ds}{dt} = Bte^t + Be^t$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 3te^t + 2Be^t \quad .. \quad (5)$$

sustituyendo (5), (4) en (1) se tiene:

$$= Bte^t + 2Be^t - A - Bte^t = 2 + e^t$$

igualando los coeficientes se tiene:

$A = -2$, $B = \frac{1}{2}$ y sustituyendo en (4) se tiene

$$s_p = -2 + \frac{1}{2}te^t \qquad (6)$$

3ª sumando (6) y (3) se tiene la solución general:

$$s_g = C_1e^t + C_2e^{-t} + \frac{1}{2}te^t - 2$$

11. $\frac{d^2x}{dt^2} + 2x = t^2 - 2$ ... (1)

1ª $\frac{d^2x}{dt^2} + 2x = 0$ ... (2)

$\implies$ la ecuación auxiliar de (2) es:

$$r^2 + 2 = 0 \implies (r - \sqrt{2}i)(r + \sqrt{2}i) = 0$$

$r_1 = \sqrt{2}\,i \implies x = e^{\sqrt{2}\,i} \implies x = \cos\sqrt{2}\,t$

$r_2 = -\sqrt{2}\,i \implies x = e^{-\sqrt{2}\,i} \implies x = \operatorname{sen}\sqrt{2}\,t$

$\implies$ la solución complementaria es:

$$x_c = C_1\cos\sqrt{2}\,t + C_2\operatorname{sen}\sqrt{2}\,t \quad .... \quad (3)$$

2ª El 0 no es raíz de la ecuación auxiliar por lo tanto la forma de la solución particular será:

$$x_p = at^2 + Bt + C \quad .... \quad (4)$$

$$\frac{dx}{dt} = 2At + B$$

$$\frac{dx}{dt^2} = 2x \quad ...... \quad (5)$$

sustituyendo (5) y (4) en (1) se tiene:

$$2At^2 + 2Bt + 2C + 2A = t^2 - 2$$

$A = \frac{1}{2}$; $B = 0$, $C = -\frac{3}{2}$; sustituyendo antes valores en 4 se tiene

$$s_p = \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2} \quad .... \quad (6)$$

3ª sumando (6) y (3) se tiene la solución general

$$s_g = C_1\cos\sqrt{2}t + C_2\operatorname{sen}\sqrt{2}\,t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}$$

12. $\frac{d^2s}{dt^2} + 3\frac{ds}{dt} + 2s = 2\operatorname{sen}t \quad .... \quad (1)$

1ª $\frac{d^2s}{dt^2} + 3\frac{ds}{dt} + 2s = 0 \quad ..... \quad (2)$

Entonces la ecuación auxiliar de (2) es:

$$r^2 + 3r + 2 = (r+2)(r+1) = 0$$

$$\implies r_1 = -2 \implies s = e^{-2t}$$

$$r_2 = -1 \implies s = e^{-t}$$

$\implies$ la solución complementaria será

$$s_c = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t} \quad .... \quad (3)$$

2ª El número $\pm i$ no es raíz de la ecuación auxiliar; por lo tanto la ecuación de la solución particular será:

$$s_p = A\cos t + B\operatorname{sen}t \quad .... \quad (4)$$

derivando (4): $\frac{ds}{dt} = -A\operatorname{sen}t + B\cos t \quad .... \quad (5)$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -A\cos t - B\operatorname{sen}t \quad ... \quad (6)$$

sustituyendo (4); (5); (6) en (1) se tiene:

$$= (A+3B)\cos t + (B-3A)\operatorname{sen}t = 2\operatorname{sen}t$$

igualando los coeficientes de la identidad se tiene para:

$A = -\frac{3}{5}$; $B = \frac{1}{5}$ y sustituyente en (4) obtenemos:

$$s_p = -\frac{3}{5}\cos t + \frac{1}{5}\operatorname{sen}t \quad .... \quad (7)$$

3ª sumando (3) y (7) se tiene la solución general

$$s_g = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t} - \frac{3}{5}\cos t + \frac{1}{5}\operatorname{sen}t$$

13. $\frac{d^2y}{dt^2} - 8\frac{dy}{dt} + 25y = 5\cos 2t \quad ... \quad (1)$

1ª $\frac{d^2y}{dt^2} - 8\frac{dy}{dt} + 25y = 0 \quad ... \quad (2)$

$\implies$ la ecuación auxiliar de (2) es:

$$r^2 - 8r + 25 = [r - (e+3i)][r - (4-3i)] = 0$$

$$\implies r_1 = 4+3i \implies y = e^{4t}, e^{3i} \implies y = e^{4t}\cos 3t$$

$$r_2 = 4-3i \implies y = e^{4t}.e^{-3i} \implies y = e^{4t}\operatorname{sen}3t$$

$\implies$ la solución complementaria será:

$$y_c = e_1^{4t}(C_1\cos 3t + C_2\operatorname{sen}3t) \quad .... \quad (3)$$

2ª El número: $\pm 2i$ no es raíz de la ecuación auxiliar; entonces la forma de la solución particular será:

$$y_p = A\cos 2t + B\operatorname{sen}2t \quad ...... \quad (4)$$

derivando (4):

$$\frac{dy}{dt} = -2A\text{sen}2t + 2B\cos2t \quad \ldots\ldots\ (5)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -4A\cos2t - 4B\text{sen}2t \quad \ldots\ldots\ (6)$$

sustituyendo (4), (5), (6) en (1) se tiene:

$= (21A - 16B)\cos2t + (21B + 16A)\text{sen}2t = 5\cos2t$

igualando los coeficientes de la identidad se tiene para

$A = \frac{15}{71}$; $B = -\frac{80}{497}$ y sustituyendo en (4) se tiene:

$$y_p = \frac{15}{71}\cos 2z - \frac{80}{497}\text{sen}2t \quad \ldots\ldots\ (7)$$

3ª sumando (7) y (3) se tiene la solución general:

$$y_p = C_1^{4t}(C_1\cos3t + C_2\text{sen}3t) + \frac{15}{71}\cos2t - \frac{80}{497}\text{sen}2t$$

En los siguientes problemas hallar la solución particular que satisface las condiciones dadas:

14. $\frac{d^2s}{dt^2} + 9s = t + \frac{1}{2}$; $s = \frac{1}{18}$; $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{9}$ cuando $t = 0$ (1)

1ª del ejercicio (9); la solución complementaria de $\frac{d^2s}{dt^2} + 9s = 0$ es:

$$s_c = C_1\cos3t + C_2\text{sen}3t \quad \ldots\ (2)$$

2ª El 0 no es raíz de la ecuación auxiliar por lo tanto la forma de la solución particular es:

$$s_p = At + B \quad \ldots\ldots\ (3)$$

derivando (3). $\frac{ds}{dt} = A$; $\frac{d^2s}{dt^2} = 0$ .... (4)

sustituyendo (4), (3) en (1) se tiene: $9At + 9B = t + \frac{1}{2}$

igualando coeficientes de la misma potencia de t se tiene para:

$A = \frac{1}{9}$; $B = \frac{1}{18}$ y sustituyendo en (3)

$$s_p = \frac{1}{9}t + \frac{1}{18} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (5)$$

3ª Sumando (5), (2) se tiene la solución general.

$$s_g = C_1\cos3t + C_2\text{sen}3t + \frac{1}{9}t + \frac{1}{18} \quad \ldots\ldots\ (6)$$

imponiendo las condiciones iniciales dado en (6) se tiene:

$$\frac{1}{18} = C_2 + \frac{1}{18} \Longrightarrow C_1 = 0$$

derivando (6) se tiene:

$$\frac{ds}{dt} = -BC_1\text{sen}3t + 3C_2\cos3t + \frac{1}{19} \quad (7)$$

imponiendo las condiciones dadas en (7) se tiene para:

$3C_2 + \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \Longrightarrow C_2 = 0$

∴ la solución particular será: $s = \frac{1}{9}t + \frac{1}{18}$

15. $\frac{d^2s}{dt^2} + 9s = 5\cos2t$; $\delta = 1$; $\frac{ds}{dt} = s$ cuando $t = 0$ ... (1)

1ª del ejercicio (9); la solución complementaria de

$\frac{d^2s}{dt^2} + 9s = 0$ es: $s_C = C_1\cos3t + C_2\text{sen}3t$ (2)

2ª el número: $\pm 2i$ no es raíz de la ecuación auxiliar por lo tanto la forma de la solución particular es:

$$s_p = A\cos2t + B\text{sen}2t \quad \ldots\ldots\ (3)$$

derivando (3) $\frac{ds}{dt} = -2A\text{sen}2t + 2B\cos2t$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -4A\cos2t - 4B\text{sen}2t \quad \ldots\ (4)$$

reemplazando (4); (3) en (1) se tiene:

$= 5A\cos2t + 5B\text{sen}2t = 5\cos2t$ ......

igualando los coeficientes de la identidad se tiene para $A = 1$; $B = 0$ y sustituyendo en (3).

$$s_p = \cos 2t \quad \ldots\ldots\ (5)$$

3ª sumando (5), (2) se tiene la solución general

$$s_q = C_1\cos3t + C_2\text{sen}3t + \cos2t \quad \ldots\ (6)$$

derivando (6): $\frac{ds}{dt} = -3C_1 \text{sen}3t + 3C_2\cos 3t - 2\text{sen}2t$ .... (7)

imponiendo las condiciones dadas; en (7), (6) se tiene para:

$$\left.\begin{array}{l} 1 = C_1 + 1 \implies C_1 = 0 \\ 3 = 3C_2 \implies C_2 = 1 \end{array}\right\} \dots (8)$$

sustituyendo (8) en (6) se tiene la solución deseada:

$$s = \text{sen}3t + \cos 2t$$

16. $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 3x = 2t + 1$; $x = \frac{1}{3}$; $\frac{dx}{dt} = -\frac{4}{9}$ cuando $t = 0$ ... (1)

1ª $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 3x = 0$ ..... (2)

la ecuación auxiliar de (2) es:

$r^2 - 2r - 3 = 0 \implies (r-3)(r+1) = 0$

si, $r_1 = 3 \implies x = e^{3t}$

$r_2 = -1 \implies x = e^{-t}$

$\implies$ la solución complementaria es:

$x_c = C_1e^{3t} + C_2e^{-t}$ ..... (3)

2ª El número 0 no es raíz de la ecuación auxiliar es de la forma $x_p = At + B$ ...... (4)

derivando (4). $\frac{dx}{dt} = A$; $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$ ..... (5)

sustituyendo (4); (5) en (1).

$$= -3At - 2A - 3B = 2t + 1$$

igualando los coeficientes de la misma potencia de t se tiene para

$A = -\frac{2}{3}$; $B = \frac{1}{9}$ sustituyendo en (4) se tiene:

$x_p = -\frac{2}{3}t + \frac{1}{9}$ ..... (6)

3ª sumando (3) y (6) se tiene la solución general

$x_p = C_1e^{3t} + C_2e^{-t} - \frac{2}{3}t + \frac{1}{9}$ .... (7)

derivando (7). $\frac{dx}{dt} = 3C_1e^{3t} - C_2e^{-t} - \frac{2}{3}$ ..... (8)

imponiendo las condiciones dadas; en (8) y (7) se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} C_1 + C/2 = \frac{2}{9} \\ 3C_1 - C/2 = +\frac{2}{9} \end{array}\right. \implies C_1 = \frac{1}{9},\ C_2 = \frac{1}{9} \quad \dots \quad (9)$$

sustituyendo (9) en (7) se tiene:

$$x = \frac{1}{9}(e^{3t} + e^{-t} - 6t + 1)$$

17. $\frac{d^2s}{dt^2} - 9s = 6t$; $s = 0$, $\frac{ds}{dt} = 0$ cuando $t = 0$ .... (1)

1ª $\frac{d^2s}{dt^2} - 9s = 0$ ..... (2)

la ecuación auxiliar de (2) es:

$r^2 - 9 = (r-3)(r+3) = 0$

$r_1 = 3 \implies s = e^{3t}$

$r_2 = -3 \implies s = e^{-3t}$

$\implies$ la solución complementaria es:

$s_C = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t}$

2ª El número o no es raíz de la ecuación auxiliar por lo tanto la forma de la solución particular:

$s_p = At + B$ ...... (4)

derivando (4)

$\frac{ds}{dt} = A$; $\frac{d^2s}{dt^2} = 0$ .... (5)

sustituyendo (5) y (4) en (1) se tiene: $-9At - 9B = 6t$

igualando los coeficientes de la misma potencia de t se tiene para

$A = -\frac{2}{3}$; $B = 0$ .... (6)

sustituyendo (6) en (4) se tiene:

$s_p = -\frac{2}{3}t$ ..... (7)

3ª sumando (7) y (3) se tiene la solución general.

$$s_g = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t} - \frac{2}{3}t \quad .... \quad (8)$$

derivando (8). $\frac{ds}{dt} = 3\,C_1e^{3t} - 3C_2e^{-3t} - \frac{2}{3} \quad ... \quad (9)$

imponiendo las condiciones dadas, en (8) y (9) se tiene:

$$\left.\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 0 \\ 3C_1 - 3C_2 &= \frac{a}{3} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow C_1 = \frac{1}{9}\,;\; C_2 = -\frac{1}{9} \quad .... \quad (10)$$

sustituyendo (10) en (8) se tiene la solución deseada

$$s = -\frac{1}{9}\,(e^{3t} - e^{-3t}) - \frac{2}{3}t$$

18. $\frac{d^2x}{dt^2} + x = 2\cos 2t;\; x = 0;\; \frac{dx}{dt} = 2$ cuando $t = 0$ .... (1)

1ª $\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$ .... (2)

la ecuación auxiliar de (2) es:

$$r^2 + 1 = 0 \Longrightarrow (r - i)(r + i) = 0$$

$$r_1 = i \Longrightarrow x = e^{it} \Longrightarrow x - \cos t$$

$$r_2 = -i \Longrightarrow x = e^{-it} \Longrightarrow x = \operatorname{sen} t$$

$\Longrightarrow$ la solución complementaria es:

$$x_c = C_1\cos t + C_2\operatorname{sen} t \quad ... \quad (3)$$

2ª EL número $\pm 2i$ no es raíz de la ecuación auxiliar por lo tanto la forma de la solución particular es:

$$x_p = A\cos 2t + B\operatorname{sen} 2t \quad ... \quad (4)$$

derivando (4). $\frac{dx}{dt} = -2A\operatorname{sen} 2t + 2B\cos 2t$

$$\frac{dx}{dt} = -4A\cos 2t - 4B\operatorname{sen} 2t \quad .... \quad (5)$$

sustituyendo (4) y (5) en (1):

$= -3A\cos 2t - 3B\operatorname{sen} 2t = 2\cos 2t$

igualando los coeficientes de la identidad:

$$A = -\frac{2}{3}\,;\quad B = 0 \quad ..... \quad (6)$$

sustituyendo (6) en (4).

$$x_p = -\frac{2}{3}\cos 2t \quad .... \quad (7)$$

3ª sumando (3) y (7) se tiene la solución general

$$x_g = C_1\cos t + C_2\operatorname{sen} t - \frac{2}{3}\cos 2t \quad ..... \quad (8)$$

derivando (8). $\frac{dx}{dt} = -C_1\operatorname{sen} t + C_2\cos t + \frac{2}{3}\operatorname{sen} 2t \quad ... \quad (9)$

imponiendo las condiciones dadas en (8) y (9) se tiene para

$C_1 = \frac{2}{3}$, $C_2 = 2$ .... (10)

sustituyendo (10) en (8) se tiene la solución deseada.

$$x = \frac{2}{3}\cos t + 2\operatorname{sen} t - \frac{2}{3}\cos 2t$$

19. $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 2x = 2\operatorname{sen} t;\; x = 0,\; \frac{dx}{dt} = 0$, cuando $t = 0$ ..... (1)

1ª $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 2x = 0$ .... (2)

la ecuación auxiliar de (2) es:

$$r^2 - 2r + 2 = 0 \Longrightarrow [r - (1 + i)][r - (1 - i)] = 0$$

$$\Longrightarrow r_1 = 1 + i \Longrightarrow x = e^t.e^{it} \Longrightarrow x = e^t\cos t$$

$$r_2 = 1 - i \Longrightarrow x = e^t,\, e^{-it} \Longrightarrow x = e^t\operatorname{sen} t$$

$\Longrightarrow$ la solución complementaria es:

$$x_c = e^t(C_1\cos t + C_2\operatorname{sen} t) \quad ...... \quad (3)$$

2ª El número $\pm i$ no es raíz de la ecuación auxiliar; por lo tanto la forma de la solución particular será:

$$x_p = A\cos t + B\operatorname{sen} t \quad ...... \quad (4)$$

derivando (4):

$$\frac{dx}{dt} = -A\operatorname{sen} t + B\cos t \quad ..... \quad (5)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\cos t - B\operatorname{sen} t \quad .... \quad (6)$$

sustituyendo (4), (5), (6) en (1) se tiene:

$= (A - 2B)\cos t + (B + 2A)\operatorname{sen} t = 2\operatorname{sen} t$

igualando los coeficientes de la identidad se tiene:

$$\left.\begin{aligned} A - 2B &= 0 \\ 2A + B &= 2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow A = \frac{4}{5}\;;\; B = \frac{2}{5} \quad ..... \quad (7)$$

sustituyendo (7) en (4) se tiene:

$$x_p = \frac{4}{5}\cos t + \frac{2}{5}\operatorname{sen} t \quad ..... \quad (8)$$

3ª sumando (8) y (3) se tiene la solución general.

$$x = e^t(C_1\cos t + C_2 \operatorname{sen} t) + \frac{4}{5}\cos t + \frac{2}{5}\operatorname{sen} t \quad .... \quad (9)$$

derivando (9) se tiene:

$$\frac{dx}{dt} = e^t\{C_1(\cos t - \operatorname{sen} t) + C_2(\cos t + \operatorname{sen} t)\} - \frac{4}{5}\operatorname{sen} t + \frac{2}{5}\cos t \quad ... \quad (10)$$

imponiendo las condiciones dadas en (9) y (10) se tiene:

$C_1 = -\frac{4}{5}$; $C_2 = \frac{2}{5}$ y sustituyendo en (9) se tiene la solución pedida

$$x = e^t(-\frac{4}{5}\cos t + \frac{2}{5}\operatorname{sen} t) + \frac{4}{5}\cos t + \frac{2}{5}\operatorname{sen} t.$$

20. $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 4e^{2x}$, $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$ cuando $x = 0$ ... (1)

1ª $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$ ...... (2)

$\Longrightarrow$ la ecuación auxiliar de (2) es:

$$r^2 + 4r + 4 = 0 \Longrightarrow (r+2)^2 = 0$$

$\Longrightarrow$ la solución complementaria será:

$$y_c = C_1e^{2x} + C_2xe^{-2x} \quad ... \quad (3)$$

2ª El número 2 no es raíz de la ecuación auxiliar, por lo tanto la forma de la solución particular.

$$y_p = Ae^{2t} \quad ...... \quad (4)$$

derivando (4). $\frac{dv}{dx} = 2Ae^{2t}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = 4Ae^{2t}$ ..... (5)

Sustituyendo (4) y (5) en (1).

$$16Ae^{2t} = 4e^{2t} \Longrightarrow A = \frac{1}{4} \quad .... \quad (6)$$

sustituyendo (6) en (4) se tiene:

$$y_p = \frac{1}{4}e^{2t} \quad .... \quad (7)$$

3ª sumando (7) y (3) se tiene la solución general.

$$y_g = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + \frac{1}{4}e^{2x} \quad .... \quad (8)$$

derivando (8).

$$\frac{dy}{dx} = -2C_1e^{-2x} + C_2(-2xe^{-2x} + e^{-2x}) + \frac{1}{2}e^{2x} \quad .... \quad (9)$$

imponiendo las condiciones dadas, en (8) y (9) se tiene para:

$C_1 = -\frac{1}{4}$; $C_2 = 1$, sustituyendo en 8 se tiene la solución deseada

$$y = -\frac{1}{4}e^{-2x} + xe^{-2x} + \frac{1}{4}e^{2t}$$

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

I) LEY DEL INTERES COMPUESTO

Una aplicación de las ecuaciones diferenciales se ofrece en los problemas en los que la variación de la función con respecto a la variable para cualquier valor de la variable es proporcional al valor correspondiente de la función; osea:

si $y = f(x)$, $\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = ky$ ..... (1) donde $k \subset \mathbb{R}$

La ecuación (1) es de variable separable del tipo I

integrando (1) obtenemos:

$$y = ce^{kx} \quad ...... \quad (2)$$

donde C es una constante arbitraria; para este caso la función y es una función exponencial.

Recíprocamente teniendo (2); por diferenciación demostramos que

$$y = ce^{-kx}, \text{ satisface a (1)}$$

A la fórmula: $\frac{dy}{dx} = ky$ se ha dado el nombre de "ley del interés compuesto" por la siguiente analogía:

Sea: y = Capital, en pesos, colocando a interés compuesto

i = interés, en pesos, de un peso en un año

Δt = intervalo de tiempo medido en años

Δy = interés de y pesos en el intervalo de tiempo Δ_t

$\Longrightarrow \Delta y = iy\cdot\Delta t$ por tanto: $\frac{\Delta y}{\Delta t} = iy$ .... (3)

La ecuación (3) expresa que la variación media de y en el tiempo Δt es proporcional a y.

$\Longrightarrow$ para adaptar la ecuación (3) a los fenómenos naturales debemos suponer que el capital y se capitaliza continuamente es decir que el intervalo de tiempo es un infinitesimo, entonces la ecuación (3) se convierte en

$$\frac{dy}{dx} = iy,$$

y la rapidez de y es proporcional a y lo que concuerda con la ecuación (1) si $k = i$.

Entonces la función dada en la ecuación (1) varía de acuerdo con la ley del interés compuesto.

Un segundo ejemplo se encuentra en la solución general de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = ky + c, \quad \ldots\ldots \ (4)$$

donde $k, c \in \mathbb{R}$, y diferentes de cero.

Entonces sea; $c = ak$, sustituyendo en (4) se tiene:

$$\frac{d(y+a)}{dx} = k(y+a) \quad \ldots\ldots \ (5)$$

Esta ecuación expresa que la función y + a varía según la ley del interés compuesto.

La ecuación diferencial (4); osea (5) es del tipo I. (variables separable) $\Longrightarrow$ la solución es:

$$y = ce^{kx} + a \qquad \ldots\ldots \ (6)$$

PROBLEMAS

1. La rapidez la variación de una función y con respecto a x es igual a $\frac{1}{3}y$, e $y = 4$ cuando $x = -1$, hallar la ley que relaciona x e y

Solución

por la ley del interés compuesto se tiene:

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}y$; separando variable e integrando se tiene:

$$= \int \frac{dy}{x} = \frac{1}{3}\int dx + t\ c \Longrightarrow \ln y = \ln C = \frac{x}{3} \Longrightarrow \ln\frac{y}{C} = \frac{x}{3}$$

tomando exponenciales a ambos miembros

$$= \frac{y}{C} = e^{x/3} \Longrightarrow y = Ce^{x/3} \quad \ldots\ldots \ (*)$$

imponiendo las condiciones de $y = 4$ cuando $x = -1$ en (*) se tiene:

$$= 4 = ce^{-1/3} \Longrightarrow C = 4e^{1/3} \Longrightarrow C = 5.58$$

$\Longrightarrow$ La ley que relaciona y con x es:

$$y = 5.58\ e^{x/3}$$

2. La rapidez de variación de una función y con respecto a x es igual a $2 - y$, $y = 8$ cuando $x = 0$. Hallar la ley.

Solución.

Según la 2ª forma de la ley del interes compuesto es:

$\frac{dy}{dx} = 2 - y$; entonces: $k = -1$

$$\Longrightarrow \frac{d(y-2)}{dx} = -(y-2)$$

separando variables e integrando:

$$= \int \frac{d(y-2)}{y-2} = -\int dx + C \Longrightarrow \ln(y-2) = -x + \ln C$$

$$\Longrightarrow y = Ce^{-x} + 2 \quad \ldots\ldots \ (*)$$

imponiendo la condición de que $y = 8$ si $x = 0$, se tiene para: $C = 6$

$\Longrightarrow$ la ley será: $y = 6e^{-x} + 2$

3. En el ejemplo 2, (ver texto) si $V = 10{,}000$ litros ¿Cuánto de agua se debe hacer correr para quitar el 50% de sal?

Solución.

Aquí la variación de la cantidad de sal viene dada por:

$$\frac{ds}{dx} = -\frac{s}{V} \ldots\ldots \ (1)$$

separando las variables e integrando se tiene:

$$\int \frac{ds}{s} = -\int \frac{dx}{V} \Longrightarrow s = C\ e^{-x/V} \qquad (*)$$

por los datos dados: para $x = 0 \Longrightarrow s = 10{,}000$; sustituyendo en (*) se tiene para $C = 10{,}000$

$$\text{pero si } x = 5{,}000, \Longrightarrow s = 10{,}000\ e^{-\frac{5000}{10000}} = 10000\ e^{-\frac{1}{2}} = \frac{10000}{e^{1/2}}$$

$\Longrightarrow$ s = 6931 litros.

$\Longrightarrow$ para quitar el 50% de sal se ha de hacer correr 6931 litros de de agua

4. La ley de Newton sobre el enfriamiento. Si el exceso de temperatura de un cuerpo sobre la del aire ambiente es x grado, la disminución de x con respecto al tiempo es proporcional a x. Si este exceso de temperatura era al principio 80 grados, y después de un minuto es 70 grados ¿Cuál será después de 2 minutos? ¿en cuánto tiempo disminuirá 20 grados?

Solución.

La variación de la función con respecto al tiempo es:

$$\frac{dx}{dt} = -kx \ \ldots$$

separando variable e integrando se tiene:

$$\int \frac{dx}{x} = -k\int dt \Longrightarrow \ln x = -kt \Longrightarrow x = Ce^{-kt} \quad \ldots\ (1)$$

imponiendo las condiciones dadas.

a) $t = 0 \Longrightarrow x = 80°$ en (1) se tiene:

$80 = c \quad \ldots\ (2)$

b) $t = 1 \Longrightarrow x = 70$

$70 = 80\ e^{-k}$

tomando ln a ambos miembros:

$\ln 70 = \ln(80\ e^{-k}) = \ln 80 + \ln e^{-k} = \ln(80) - k\ln e$

$\ln 70 = \ln 80 - k \Longrightarrow \ln 80 - \ln 70$

$\Longrightarrow k = 0.13 \quad \ldots\ (3)$

sustituyendo (2), (3) en (1) se tiene:

$$x = 80\ e^{-0.13t}$$

1) para t = 2 minutos: $x = 80\ e^{-(0.13)(2)} = 61.58$ grados

2) para x = 20°;

$\Longrightarrow 20 = 80\ e^{0.13t}$

tomando ln a ambos miembros

$\ln 20 = \ln 80\ e^{-0.13t} = \ln 80 + \ln e^{0.13t}$

$\ln 20 = \ln 20 + \ln 4 - 0.13\ t\ln e$

$0.13t = \ln 4$

$\Longrightarrow t = 10.09$ minutos

5. La presión atmosférica p en un lugar, en función de la altura h sobre el nivel del mar, cambia según la ley del interés compuesto. Suponiendo $p = 1000$ x cm^2 cuando $h = 0$ y $670g$ x cm^2 cuando $h = 3000$ mts. Hallar p: a) cuando $h = 2000$ m; b) cuando $h = 5000$ mts.

Solución.

La variación de la presión en función de la altura es:

$$\frac{dp}{dh} = -kp \quad \ldots$$

separando variable é integrando se tiene:

$$\int \frac{dp}{p} = -k\int dh \Longrightarrow p = C\,e^{-kh} \quad (1)$$

imponiendo las condiciones: para $h = 0$, $p = 1000$

$\Longrightarrow 1000 = C \ \ldots\ (2)$; para $h = 3{,}000$; $P = 670$

$\Longrightarrow 670 = 100\ e^{-3000k}$

tomando ln a ambos miembros: $\ln 670 = \ln 1000 - 3000k$

$\Longrightarrow k = \ln 1000 - \ln 670 \Longrightarrow k = 1.33 \times 10^{-4} \ \ldots\ (3)$

sustituyendo (2) y (3) en (1) a tiene:

$$P = 1000\,e^{-1.33\times 10^{-4}h} \quad \ldots\ (4)$$

a) para $h = 2000$

$\Longrightarrow P = 1000e^{(-1.33\times10^{-4})(2000)} = 766$

$P = 766$ g x cm^2

b) para $h = 3000$

$P = 1000\ e^{(-1.33\times10^{-4})(3000)} = 513$

$P = 513g$ x cm^2

6. La velocidad de una reacción química en la que x es la cantidad que se transforma en el tiempo t es la razón de la variación de x con respecto al tiempo.

Reacción del 1º tiempo: sea: a la concentración al principio del experimento, entonces $\frac{dx}{dt} = k(a - x)$, puesto que la velocidad de variación de la cantidad que se transforma es proporci[illegible] a la concentra -

ción en el mismo instante. (Obsérvese que $a - x$, la concentración, cambia según la ley del interés compuesto)

Demostrar que la k, la constante de velocidad, es igual a:

$$\frac{1}{t}\ln\frac{a}{a-x}$$

Solución.

Según los datos del problema: $\frac{dx}{dt} = k(a-x)$

separando variable e integrando:

$$\int\frac{dx}{a-x} = k\int dt \Longrightarrow -\ln(a-x) = kt - \ln C$$

$$\Longrightarrow \ln C - \ln(a-x) = kt \quad \dots\quad (*)$$

haciendo: $\ln c = \ln a$: en (*) se tiene:

$$\ln a - \ln a - x = kt \Longrightarrow k = \frac{1}{t}\ln\frac{a}{a-x}$$

7. En la reacción química llamada "inversión del mascabado", la velocidad de inversión con respecto al tiempo es proporcional a la cantidad del mascabado que queda sin invertir.

Si 1000 kg de mascabado se reducen al cabo de 10 horas a 800 kg ¿cuánto quedará sin invertir después de 24 horas?

Solución

Sea x la cantidad de mascabado; entonces por el enunciado del problema se tiene: $\frac{dx}{dt} = kx$

separando variable e integrando

$$\int\frac{dx}{x} = k\int dt \Longrightarrow x = C\,e^{kx} \quad \dots\quad (1)$$

imponiendo las condiciones dadas: $t = 0 \Longrightarrow x = 1000$ en (1) se tiene para $\Longrightarrow C = 1000 \quad \dots\quad (2)$

Para $t = 10 \Longrightarrow x = 800$ en (1) se tiene

$$800 = 1000\,e^{10k}$$

tomando ln a ambos miembros

$$\ln 800 = \ln 1000 + 10\,k$$

$$\Longrightarrow 10k = \ln 800 - \ln 1000 = \ln 8 - \ln 10$$

$$\Longrightarrow k = -\,0.022315 \quad \dots\dots\quad (3)$$

sustituyendo (2) y (3) en (1) se tiene

$$x = 1000\,e^{-0.022315t}$$

Ahora para $t = 24$; $x = 1000\,e^{(-0.022315)(24)}$

$$\Longrightarrow x = 586\text{ kg}$$

8. En un círculo eléctrico el voltaje dado E y la intensidad i (amperios) el voltaje E se consume en:

1) La resistencia R (ohmios) del circuito;
2) La inductancia L. La ecuación que rige es:

$$E = Ri + L\frac{di}{dt} \quad \text{osea:} \quad \frac{di}{dt} = \frac{1}{L}(E - Ri)$$

Por tanto, a este proceso se le aplica la ecuación (4), siendo E, R, L constantes. Dados $L = 640$, $R = 250$, $E = 500$ y $i = 0$ cuando $t = 0$. Demostrar que la corriente se aproximará a 2 amperios a medida que t aumenta además determinar en cuantos segundos i llegará al 90% de su valor máximo.

Solución.

De los datos del problema se tiene que:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E \Longrightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$$

$$\Longrightarrow di + \frac{R}{L}i\,dt = \frac{E}{L}dt \quad \dots\quad (1)$$

Hallando el factor integrante:

$$\psi(t) = e^{\frac{R}{L}\int dt} = e^{\frac{R}{L}t} \quad \dots\dots\quad (2)$$

a (1) le multiplicamos por (2) se tiene:

$$e^{\frac{R}{L}t}\,di + \frac{R}{L}e^{\frac{R}{L}t}\,i\,dt = \frac{E}{L}e^{\frac{R}{L}t}\,dt$$

$$= d(e^{\frac{R}{L}t}\,i) = \frac{E}{L}e^{\frac{R}{L}t}\,dt \quad \dots\quad (3)$$

integrando (3) se tiene:

$$\int d(e^{\frac{R}{L}t}\,i) = \frac{E}{L}\int e^{\frac{R}{L}t}\,dt$$

$$\Longrightarrow e^{\frac{R}{L}t}\,i = \frac{E}{L}\times\frac{L}{R}\int e^{\frac{R}{t}t}\,d\left(\frac{R}{L}t\right) = \frac{E}{R}e^{\frac{R}{L}t} + C.$$

$$\Longrightarrow\ i = \frac{E}{R} + C e^{-\frac{R}{L}t} \quad ..... (4)$$

imponiendo las condiciones dadas, en (4) se tiene:

para $t = 0$, $i = 0 \Longrightarrow C = -\frac{E}{R}$ .... (5)

sustituyendo (5) en (4) tenemos:

$$i = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \quad ... (6)$$

cuando $t \to \infty$; en (6) se tiene que:

$$i = \frac{E}{R} = \frac{500}{150} = 2 \quad .... (7)$$

asimismo el máximo valor de i será 2 amperios; $\Longrightarrow$ el 90% será 1.8. $\Longrightarrow$ sustituyendo en (b) se tiene:

$$\Longrightarrow 1.8 = 2(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) = 1.8 = 2(1 - e^{-\frac{25}{64}t})$$

$$= e^{-\frac{25}{69}t} = 1 - 0.9 \Longrightarrow e^{-\frac{25}{64}t} = 0.1$$

$$\Longrightarrow e^{\frac{25}{64}t} = \frac{1}{0.1} \Longrightarrow t = 5.9 \text{ seg}$$

9. En la descarga de un condensador, el voltaje v disminuye con el tiempo y la variación de v con respecto al tiempo es proporcional a v, dado $k = \frac{1}{40}$, hallar t, si v disminuye hasta el 10% de su valor primitivo.

Solución.

por el enunciado del problema se tiene: $\frac{dv}{dt} = kv$;

separando variable é integrando

$$\int \frac{dv}{v} = k\int dt \Longrightarrow v = C e^{kt}$$

$$\Longrightarrow v = C e^{kt} \quad ..... (1)$$

$$\begin{array}{l} v \Longrightarrow 100\% \\ C - \quad 10\% \end{array} \Longrightarrow C = \frac{10v}{100} \Longrightarrow C = 0.1v \quad .... (2)$$

sustituyendo (2) y $k = \frac{1}{40}$ en (1) se tiene:

$$v = 0.1\, v\, e^{t/40} \Longrightarrow e^{\frac{1}{40}t} = 10$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{40}t = \ln 10$$

$$\Longrightarrow t = 92 \text{ seg.}$$

10. El concentrar una solución salina (o ácida) añadiendo sal (o ácido) manteniendo constante el volumen. conduce a la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{v}(v - y)$$

En donde v = volumen igual a constante, y = cantidad de sal (o ácido) en el tanque en un momento cualquiera, y x = cantidad de sal (o de ácido) que se ha añadido desde el principio. Dedúscase este resultado y compárece con el ejemplo 2.

Solución.

En la mezcla de volumen v = constante, la cantidad de sal es y, la cantidad sal que se añade x, de aqui la cantidad de sal en cualquier volumen U de la mezcla es $(\frac{v - y}{v})U$.

Además supongamos que un volumen: Δx de la mezcla se añade, la cantidad de sal que asi se agrega será:

$(\frac{v - y}{v})\Delta x$; por lo tanto el cambio de la cantidad de sal en el tanque viene dado por:

$$\Delta y = (\frac{v - y}{v})\Delta x \Longrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v - y}{v}$$

$\Longrightarrow$ cuando $\Delta x \to 0$, se tendrá la rapidez instantánea de la variación de y con respecto a x es decir que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v - y}{v}$$

APLICACIONES A PROBLEMAS DE MECANICA

Los métodos explicados en este capítulo tienen una aplicación concreta a la mecánica y Física; asi por ejemplo los problemas del movimiento rectilineo conducen frecuentemente a ecuaciones diferenciales de primero o segundo orden, puesto que la solución de estos problemas depende de la resolución de estas ecuaciones.

Asimismo es preciso recordar que:

$$v = \frac{ds}{dt}; \quad a = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{ds} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Siendo v; a, respectivamente, la velocidad y aceleración en cualquier instante (=t), y S la distancia del móvil en este instante a un origen fijo sobre la trayectoria.

Un modelo importante de movimiento rectilineo es aquel en el que la aceleración y la distancia están en razón constante y tienen signos opuestos.

$$\Longrightarrow \quad a = -k^2s \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

siendo k^2 = magnitud de a a la unidad de distancia.

Así dentro de este modelo tenemos el "MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE" cuya ecuación es:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + k^2s = 0 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

de la integración de (3) obtenemos la solución completa.

$$s = C_1\cos kt + C_2\operatorname{sen} kt \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

de (4) por derivación se tiene:

$$\frac{ds}{dt} = v = k(-C_1\operatorname{sen} kt + C_2\cos kt) \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Es fácil ver que el movimiento definido por (4) es una aceleración periódica entre las fracciones extremos $s = b$; $s = -b$, determinada por:

$$b = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\ ; \quad \text{periodo} = \frac{2\pi}{k}$$

Reemplazando las constantes C_1; C_2 en (4) por b y A

$$C_1 = b\operatorname{sen} A, \quad C_2 = b\cos A$$

sustituyendo estos valores (4) se reduce a:

$$s = b\operatorname{sen} A\cos kt + b\cos A\operatorname{sen} kt$$

$$s = b\operatorname{sen}(kt + A)$$

PROBLEMAS

EN CADA UNO DE LOS SIGUIENTES PROBLEMAS SE DAN LA ACELERACION Y LAS CONDICIONES. HALLAR LA ECUACION DEL MOVIMIENTO.

1. $a = -k^2s$; $s = 0$; $v = v_o$ cuando $t = 0$

Solución.

se sabe que:

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = -k^2s \Longrightarrow \frac{d^2s}{dt^2} + k^2s = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

la ecuación auxiliar de (1) es:

$$r^2 + k^2 = 0 \Longrightarrow r_1 = ki \Longrightarrow s = e^{ki} \qquad s = \cos kt$$

$$\Longrightarrow$$

$$r_2 = -ki \Longrightarrow s = e^{-ki} \qquad s = \operatorname{sen} kt$$

$\Longrightarrow$ la solución general será:

$$s = C_1\cos kt + C_2\operatorname{sen} kt \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

derivando (2):

$$V = \frac{ds}{dt} = -kC_1\operatorname{sen} kt + k\,C_2\cos kt \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

imponiendo las condiciones dadas; en (2) y (3) se tiene para

$$C_1 = 0\ ; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$V_o = kC_2 \Longrightarrow C_2 = \frac{V_o}{k} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

sustituyendo (4), (5) en (2) se tiene:

$$s = \frac{V_o}{k}\operatorname{sen} kt$$

2. $a = -k^2s$; $s = s_o$; $V = V_o$ cuando $t = 0$

Solución.

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = -k^2s \Longrightarrow \frac{d^2s}{dt^2} + k^2s = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

por el problema anterior se tiene que:

$$s = C_1\cos kt + C_2\operatorname{sen} kt \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

derivando (2).

$$v = \frac{ds}{dt} = -R\ C_1\operatorname{sen} kt + kC_2\cos kt \quad \ldots \quad (3)$$

imponiendo las condiciones dadas, en (2) y (3) se tiene:

$$C_1 = s_o\ ; \quad C_2 = \frac{V_o}{k} \quad \ldots \quad (4)$$

sustituyendo (4) en (2) se tiene:

$$s = s_o\cos kt + \frac{V_o}{k}\operatorname{sen} Kt.$$

3. $a = 6 - s$, $s = 0$, $v = 0$, cuando $t = 0$

Solución.

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = 6 - s \implies \frac{d^2s}{dt^2} + s = 6 \quad \ldots$$

1ª) $\frac{d^2s}{dt^2} + s = 0 \quad \ldots (1)$

$\implies$ la ecuación auxiliar de (1) es:

$$r^2 + 1 = 0 \implies (r - i)(r + i) = 0 \implies r_1 = 1 \implies e^{it} \quad s = \cos t$$
$$\implies$$
$$r_2 = -1 \implies e^{-it} \quad s = \operatorname{sen} t$$

$\implies$ la solución complementaria es:

$$s_c = C_1\cos t + C_2\operatorname{sen} t \quad \ldots (2)$$

2ª El cero no es raíz de la ecuación auxiliar; por tanto la forma de la solución particular es:

$$s_p = A \quad \ldots (3)$$

derivando (3):

$$\frac{ds}{dt} = 0 \;;\; \frac{d^2s}{dt^2} = 0 \quad \ldots (4)$$

(3) y (4) sustituyendo en (1).

$\implies A = 6 \quad \ldots (5)$

(5) sustituyendo en (3) se tiene: $s_p = 6 \quad \ldots (6)$

3ª Sumando (2) y (6) se tiene:

$$s_g = C_1\cos t + C_2\operatorname{sen} t + 6 \quad \ldots (7)$$

derivando (7)

$$v = \frac{ds}{dt} = -C_1\operatorname{sen} t + C_2\cos t \quad \ldots (8)$$

imponiendo las condiciones dadas; en (7) y (8) se tiene:

$$C_1 = -6 \;;\; C_2 = 0 \quad \ldots (9)$$

(9) sustituyendo en (7) se tiene: $s = 6(1 - \cos t)$

4. $a = \operatorname{sen}2t - s$, $s = 0$, $v = 0$, cuando $t = 0$

Solución.

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = \operatorname{sen}2t - s \implies \frac{d^2s}{dt^2} + s = \operatorname{sen}2t$$

1ª $\frac{d^2s}{dt^2} + s = 0 \quad \ldots (1)$

$\implies$ por el ejercicio (3) la solución complementaria es:

$$s_c = C_1\cos t + C_2\operatorname{sen} t \quad \ldots (2)$$

2ª El número $\pm 2i$ no es raíz de la ecuación auxiliar por tanto la solución particular será:

$$s_p = A\cos2t + B\operatorname{sen}2t \quad \ldots (3)$$

derivando (3) se tiene:

$$\frac{ds}{dt} = -2A\operatorname{sen}2t + 2B\cos2t$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -4A\cos2t - 4B\operatorname{sen}2t \quad \ldots (4)$$

(3) y (4) sustituyendo en (1) tenemos:

$$= -3A\cos2t - 3B\operatorname{sen}2t - \operatorname{sen}2t$$

igualando los coeficientes de la identidad se tiene:

$$A = 0, \quad B = -\frac{1}{3} \quad \ldots (5)$$

(5) sustituyendo en (3) se tiene:

$$s_p = -\frac{1}{3}\operatorname{sen} 2t \quad \ldots (6)$$

3ª sumando (2) y (6) se tiene:

$$s = C_1\cos t + C_2\operatorname{sen} t - \frac{1}{3}\operatorname{sen}2t \quad \ldots (7)$$

derivando (7)

$$v = \frac{ds}{dt} = -C_1\operatorname{sen} t + C_2\cos t - \frac{2}{3}\cos t \quad \ldots (8)$$

imponiendo las condiciones dadas, en (7) y (8) se tiene:

para $C_1 = 0$; $C_2 = \frac{2}{3} \quad \ldots (9)$

(9) sustituyendo en (7) se tiene:

$$s = \frac{2}{3}\operatorname{sen} t - \frac{1}{3}\operatorname{sen}2t$$

5. $a = -2v - 2s$, $s = 3$, $v = -3$ cuando $t = 0$

Solución.

$$\Longrightarrow \frac{d^2s}{dt^2} = -2\frac{ds}{dt} - 2s \Longrightarrow \frac{d^2s}{dt^2} + 2\frac{ds}{dt} + 2s = 0 \quad .... \quad (1)$$

la auxiliar auxiliar de (1) será:

$$r^2 + 2r + 2 = 0 \Longrightarrow [r - (-1 + i)][r - (-1 - i)]$$

$$\Longrightarrow r_1 = -1 + i \Longrightarrow s = e^{-t}.e^{it} \Longrightarrow s = e^{-t}\cos t$$

$$r_2 = -1 - i \Longrightarrow s = e^{-t}e^{-it} \Longrightarrow s = e^{-t}\operatorname{sen}t$$

$\Longrightarrow$ la solución general será:

$$s = e^{-t}(C_1\cos t + C_2\operatorname{sen}t) \quad .... \quad (2)$$ derivando (2).

derivando (2).

$$\frac{ds}{dt} = e^{-t}[C_1(-\operatorname{sen}t - \cos t) + C_2(\cos t - \operatorname{sen}t)] \quad .... \quad (3)$$

imponiendo las condiciones dadas, en (2) y (3) se tiene:

para $C_1 = 3$; $C_2 = 0$ ..... (4)

(4) sustituyendo en (2) se tiene: $s = 3e^{-t}\cos t$

6. $a = -nv$; $s = 0$, $v = n$ cuando $t = 0$

Solución.

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = -nv \Longrightarrow \frac{d^2s}{dt^2} + n\frac{ds}{dt} = 0 \quad .... \quad (1)$$

la ecuación auxiliar de (1) es:

$$r^2 + nr = 0 \Longrightarrow r(r + n) = 0$$

$$r_1 = 0 \Longrightarrow s = e^0 = 1$$

$$r_2 = -n \Longrightarrow s = e^{-nt}$$

$\Longrightarrow$ la solución general será:

$$s = C_1 + C_2e^{-nt} \quad ..... \quad (2)$$

derivando (2)

$$V = \frac{ds}{dt} = -nC_2e^{-nt} \quad .... \quad (3)$$

sustituyendo las condiciones dadas en (2) y (3) se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} C_1 + C_2 = 0 \\ -nC_2 = n \end{array}\right\} \Longrightarrow C_1 = 1 \; ; \; C_2 = -1 \quad .... \quad (4)$$

(4) sustituyendo en (2) se tiene: $s = 1 - e^{-nt}$

7. $a = 4\operatorname{sen}t - 4s$; $s = 0$; $v = 0$ cuando $t = 0$

Solución.

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = 4\operatorname{sen}t - 4s \Longrightarrow \frac{d^2s}{dt^2} + 4s = 4\operatorname{sen}t \quad .... \quad (1)$$

1ª $\frac{d^2s}{dt^2} + 4s = 0$ .... (2)

la ecuación auxiliar de (2) será:

$$r^2 + 4 = 0 \Longrightarrow (r - 2i)(r + 2i) = 0$$

$$r_1 = 2i \Longrightarrow s = e^{-2i} \Longrightarrow s = \cos 2t$$

$$r_1 = -2i \Longrightarrow s = e^{2i} \Longrightarrow s = \operatorname{sen}2t$$

$\Longrightarrow$ la solución complementaria será:

$$s_c = C_1\cos 2t + C_2\operatorname{sen}2t \quad .... \quad (3)$$

2ª El número $\pm$ i no es raíz de la ecuación auxiliar; por tanto la forma de la solución particular será:

$$s_p = A\cos t + B\operatorname{sen}t \quad ..... \quad (4)$$

derivando (3) se tiene:

$$\frac{ds}{dt} = -A\operatorname{sen}t + B\cos t$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -A\cos t - B\operatorname{sen}t \quad ..... \quad (5)$$

sustituyendo (4) y (5) en (1), se tiene:

$$= 3A\cos t + 3B\operatorname{sen}t = 4\operatorname{sen}t$$

igualando los coeficientes de la identidad se tiene:

para $A = 0$; $B = \frac{A}{3}$ .... (6)

(6) sustituyendo en (4) se tiene:

$$s_p = \frac{4}{3}\operatorname{sen}t \quad .... \quad (7)$$

3°) sumando (3) y (7) se tiene la solución general.

$$s_g = C_1\cos 2t + C_2\operatorname{sen}2t + \frac{4}{3}\operatorname{sen}t \quad .... \quad (8)$$

derivando (8):

$$v = \frac{ds}{dt} = -2C_1 \text{sen}2t + 2C_2 \cos t + \frac{4}{3}\cos t \quad \dots \ (9)$$

imponiendo las condiciones dadas; en (8) y (9) se tendrá; para:

$$C_1 = 0 \quad ; \quad C_2 = -\frac{2}{3} \quad \dots . \ (10)$$

(10) reemplazando en (8);

$$s = \frac{4}{3}\text{sent} - \frac{2}{3}\text{sen}2t$$

8. $a = -2v - 5s$; $s = 1$; $v = 1$, cuando $t = 0$

Solución

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = -2\frac{ds}{dt} - 5s \implies \frac{d^2s}{dt^2} + 2\frac{ds}{dt} + 5s = 0 \quad \dots . \ (1)$$

la ecuación auxiliar de (1) es:

$$r^2 + 2r + 5 = 0 \implies [r - (-1 + 2i)][r - (-1 - 2i)] = 0$$

para: $r_1 = (-1 + 2i) \implies s = e^{-t}e^{2i} \implies s = e^{-t}\cos 2t$

$r_2 = (-1 - 2i) \implies s = e^{-t}e^{-2i} \implies s = e^{-t}\text{sen}2t$

$\implies$ la solución general es:

$$s = e^{-t}(C_1\cos 2t + C_2 \text{sen}2t) \quad \dots .. \ (2)$$

derivando (2) se tiene:

$$v = \frac{ds}{dt} = e^{-t}[C_1(-2\text{sen}2t - \cos 2t) + C_2(2\cos 2t - \text{sen}2t)] \quad \dots . \ (3)$$

imponiendo las condiciones dadas, en (2) y (3) se tendrá:

para: $C_1 = 1$; $C_2 = 1$ ..... (4)

(4) sustituyendo en (2) se tiene: $s = e^{-t}(\cos 2t + \text{sen}2t)$

9. Se dan: $a = 8 - 4s$; $v = 0$; $s = 0$ cuando $t = 0$; Demostrar que el movimiento es una vibración armónica simple cuyo centro es $s = 2$, su amplitud 2 y su periodo π.

Solución.

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = 8 - 4s \implies \frac{d^2s}{dt^2} + 4s = 8 \quad \dots . \ (1)$$

1ª $\frac{d^2s}{dt^2} + 4s = 0$ ... (2)

del ejercicio (7) la solución complementaria es:

$$s_c = C_1 \cos 2t + C_2 \text{sen}2t \quad \dots . \ (3)$$

2ª El cero no es raíz de la ecuación auxiliar; por lo tanto la forma de la solución particular será:

$$s_p = A \quad \dots .. \ (4)$$

derivando (3):

$$\frac{ds}{dt} = 0 \ ; \ \frac{d^2s}{dt^2} = 0 \quad \dots . \ (5)$$

sustituyendo (4) y (5) en (1) tenemos para $\boxed{A = 2}$

$$\implies s_p = 2 \quad \dots .. \ (6)$$

3ª sumando (3) y (6) tenemos la solución general:

$$S = C_1\cos 2t + C_2\text{sen}2t + 2 \quad \dots .. \ (7)$$

derivando (7):

$$V = \frac{ds}{dt} = -2C_1\text{sen}2t + 2C_2\cos 2t \quad \dots . \ (8)$$

imponiendo las condiciones dadas, en (7) y (8) tendremos:

para: $C_1 = -2$; $C_2 = 0$, y estos valores sustituyendo en (7) se tiene:

$$S = 2(1 - \cos 2t) \quad \dots \dots .. \ (9)$$

$\implies$ (9) representa un movimiento armónico simple.

el periodo es $\frac{2\pi}{2} = \pi$ seg.

la amplitud es: $\sqrt{4 + 0} = 2 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$

10. La aceleración de un punto material viene dado por la fórmula:

$$a = 5\cos 2t - 9s$$

a) Si el punto parte del reposo en el origen, hallar su ecuación de movimiento.

¿Cuál es la mayor distancia del origen que el punto alcanza?

b) Si el punto parte del origen con velocidad $v = 6$, hallar su ecuación de movimiento.

¿Cuál es la mayor distancia del origen que el punto alcanza?

Solución.

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} + 5\cos 2t - 9s \Longrightarrow \frac{d^2s}{dt^2} + 9s = 5\cos 2t \quad ..... \quad (1)$$

1ª $\frac{d^2s}{dt^2} + 9s = 0 \quad .... \quad (2)$

La ecuación auxiliar de (2) es:

$$r^2 + 9 = 0 \Longrightarrow (r - 3i)(r + 3i) = 0$$

$$\Longrightarrow r_1 = 3i \Longrightarrow s = e^{3i} \Longrightarrow s = \cos 3t$$

$$r_2 = -3i \Longrightarrow s = e^{-3i} \Longrightarrow s = \operatorname{sen} 3t$$

$\Longrightarrow$ la solución complementaria será:

$$s_c = C_1\cos 3t + C_2\operatorname{sen} 3t \quad ..... \quad (3)$$

2ª El número $\pm 2i$ no es raíz de la ecuación auxiliar; entonces la forma de la solución particular es:

$$s_p = A\cos 2t + B\operatorname{sen} 2t \quad ... \quad (4)$$

derivando (4):

$$\frac{ds}{dt} = -2A\operatorname{sen} 2t + 2B\cos 2t$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -4A\cos 2t - 4B\operatorname{sen} 2t \quad .... \quad (5)$$

sustituyendo (4) y (5) en (1) tendremos:

$$= 5A\cos 2t + 5B\operatorname{sen} 2t = 5\cos 2t$$

igualando los coeficientes de la identidad tendremos para:

$$A = 1 \quad ; \quad B = 0 \quad .... \quad (6)$$

(6) sustituyendo en (4) se tiene:

$$s_p = \cos 2t \quad .... \quad (7)$$

3ª sumando (3) y (7) se tiene:

$$s = C_1\cos 3t + C_2\operatorname{sen} 3t + \cos 2t \quad .... \quad (8)$$

derivando (8):

$$v = \frac{ds}{dt} = -3C_1\operatorname{sen} 3t + 3C_2\cos 3t - 2\operatorname{sen} 2t \quad ... \quad (9)$$

imponiendo las condiciones dadas; en (8) y (9) tendremos para:

a) $s = 0$; $v = 0$, cuando $t = 0$ entonces se tiene para

$C_1 = -1; \quad C_2 = 0 \quad ..... \quad (10)$

sustituyendo (10) en 8 se tiene

$$s = \cos 2t - \cos 3t$$

b) para $s = 0$; $v = 6$; cuando $t = 0$

$C_1 = -1; \quad C_2 = 2 \quad .... \quad (11)$

sustituyendo (11) en (8)

$$s = \cos 2t + 2\operatorname{sen} 3t - \cos 3t$$

11. Un cuerpo cae partiendo del reposo y recorre una distancia de 24.5m; suponiendo $a = 9.8 - V$, hallar el tiempo durante el cuál cae.

Solución.

Ecuaciones Diferenciales Lineales de n-ésimo Orde con Coeficientes Constante

La solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea.

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + p_n y = 0 \qquad (1)$$

donde: p_i, $i = 1,2,3,\ldots n$ son constantes.

si hacemos la sustitución:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = D^n, \quad \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = D^{n-1}, \quad \ldots, \quad \frac{dy}{dx} = D$$

$\Longrightarrow D^n, D^{n-1}, \ldots, D,$ se denominará operadores diferenciales

Entonces (1) se transforma en:

$$(D^n + p_1 D^{n-1} + p_2 D^{n-2} + \ldots + p_n)y = 0$$

Sea $p(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \ldots + p_n$ un polinomio

Calculemos el polinomio dado en: $\lambda = D$

$\Longrightarrow p(D) = D^n + p_1 D^{n-1} + p_2 D^{n-2} + \ldots + p_n$ y se llamará operador diferencial asociado a (1).

Sean $r_1, r_2, \ldots r_n$, raíces distintas de $p(\lambda)$, c/u repitiéndose $k_1, k_2, \ldots k_n$ veces respectivamente.

$\Longrightarrow p(\lambda) = (\lambda - r_1)^{k_1}(\lambda - r_2)^{k_2} \ldots (\lambda - r_n)^{k_n}$, y para el polinomio asociado será:

$$p(D) = (D - r_1)^{k_1}(D - r_2)^{k_2} \ldots (D - r_n)^{k_n} y = 0$$

se pueden presentar los siguientes casos:

a) $r_1, r_2, \ldots r_n$ son reales y distintas, en este caso el sistema fundamental de soluciones de (1) será de la forma:

$e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_n x}$

y la solución general será $\quad y_g = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_n e^{r_n x}$

b) las raíces de $p(\lambda)$ son reales, pero algunas de ellas múltiples

así: $r_1 = r_2 = \ldots = r_k = \bar{r}$

$\Longrightarrow \bar{r}$ es una raíz k múltiple de $p(\lambda)$, mientras que las n-k raíces distintas.

En este caso el sistema fundamental de soluciones es de la forma:

$$e^{\bar{r}x}, \ xe^{\bar{r}x}, \ x^2 e^{\bar{r}x}, \ldots \ x^{k-1}e^{\bar{r}_{k+1}x}, \ e^{r_{k+1}x}, \ldots \ e^{r_n x}$$

y la solución general es:

$$y_g = C_1 e^{\bar{r}_1 x} + C_2 x e^{\bar{r}.x} + C_3 x^2 e^{\bar{r}x} + \ldots + C_k x^{k-1} e^{\bar{r}x} + C_{k+1} e^{r_{k+1}x} + \ldots$$

$$\ldots \ C_n e^{r_n x}$$

c) algunas de las raíces de $p(\lambda)$ son imaginarias.

PROBLEMAS

Hallar la solución general de c/u de las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $\dfrac{d^3y}{dx^3} + 4\dfrac{dy}{dx} = 0$

$p(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda = 0 \quad \Longrightarrow \lambda(\lambda^2 + 4) = \lambda(\lambda + 2i)(\lambda - \lambda i)$

$\Longrightarrow P(D) = D(D + 2i)(D - 2i) = (D - 0)(D + 2i)(D - 2i) = 0$

$\Longrightarrow (D - 0)$; da como solución $e^{Dx} = 1$

$(D + 2i) = e^{-2i}, \quad (D - 2i) = e^{2i}$

$\Longrightarrow \frac{1}{2}(e^{2i} + e^{-2i}) = \cos 2x \ ; \ \frac{1}{2i}(e^{2i} - e^{-2i}) = \text{sen}2x$

donde 1, cos2x, sen2x constituye el sistema fundamental de soluciones

$\Longrightarrow$ la solución general será:

$$y_g = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \text{sen} 2x$$

2. $\dfrac{d^5y}{dx^5} - \dfrac{dy}{dx} = 0$

Solución.

$P(\lambda) = \lambda^5 - \lambda = 0$

$\Longrightarrow P(\lambda) = \lambda(\lambda^4 - 1) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda + i)(\lambda - i)$

$\Longrightarrow p(D) = D(D - 1)(D + 1)(D + i)(D - i) = 0$

$(D - 0)$ da como solución $e \quad = 1$

$(D - 1)$ da como solución e^x

$(D + 1)$ da como solución e^{-x}

$(D + i)$ da como solución $\cos x$

$(D - i)$ da como solución $\operatorname{sen} x$

$\Longrightarrow$ la solución general es:

$$y_g = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-x} + C_4\cos x + C_5\operatorname{sen} x$$

3. $\dfrac{d^4y}{dx^4} - \dfrac{d^3y}{dx^3} + \dfrac{9\,d^2y}{dx^2} - 9\dfrac{dy}{dx} = 0$

Solución.

$P(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 + 9\lambda^2 - 9\lambda = 0$

$\quad = \lambda(\lambda^3 - \lambda^2 + 9\lambda - 9) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 3i)(\lambda - 3i)$

$P(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 3i)(\lambda - 3i)$

$P(D) = D(D - 1)(D + 3i)(D - 3i) = 0$

se tiene las raíces: $0, 1, 3i, -3i$ que nos dan el siguiente sistema fundamental de soluciones: $1,\ e^x,\ \cos 3x,\ \operatorname{sen} 3x$

$\Longrightarrow$ la solución general es:

$$y_g = C_1 + C_2e^x + C_3\cos 3x + C_4\operatorname{sen} 3x$$

4. $\dfrac{d^3x}{dt^3} + \dfrac{6\,d^2x}{dt^2} + \dfrac{12\,dx}{dt} + 8x = 0$

Solución:

$P(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8 = 0$

$P(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda + 2)^2 = (\lambda + 2)^3$

$\Longrightarrow P(D) = (D + 2)(D + 2)^2 = (D + 2)^3 = 0$

las raíces son: $-2, -2, -2$

$\Longrightarrow$ El sistema fundamental de soluciones es: $e^{-t},\ te^{-t},\ t^2e^{-t}$

y la solución general es:

$$x_g = C_1e^{-t} + C_2te^{-t} + C_3t^2e^{-t} = e^{-t}(C_1 + C_2t + C_3t^2)$$

5. $\dfrac{d^4s}{dt^4} - s = t^3 + 3t \quad \ldots. \quad (1)$

Solución.

En primer lugar hallamos la solución complementaria de la ecuación diferencial lineal homogénea es decir de:

$$\frac{d^4s}{dt^4} - s = 0$$

$\Longrightarrow P(\lambda) = \lambda^4 - 1 = 0$

$P(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda + i)(\lambda - i)$

$\Longrightarrow P(D) = (D + 1)(D - 1)(D + i)(D - i) = 0 \quad \ldots. \quad (2)$

las raíces son: $-1, 1, i, -i$

$\Longrightarrow$ la solución complementaria s_c es:

$$s_c = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3\cos t + C_4\operatorname{sen} t \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

2ª El número o no es raíz del polinomio asociado (2); entonces la forma de la solución particular será:

$$s_p = At^3 + Bt^2 + Ct + D \quad \ldots.. \quad (4)$$

derivando se tiene:

$$\frac{ds}{dt} = 3At^3 + Bt + C$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 6At + 2B$$

$$\frac{d^3s}{dt^3} = 6A$$

$$\frac{d^4s}{dt^4} = 0 \quad \ldots. \quad (5)$$

(3) y (4) sustituyendo en (1)

$$-At^3 - Bt^2 - Ct - D = t^3 + 3t$$

igualando los coeficientes de la misma potencia de t; se tendrá:

$A = -1$; $B = 0$; $C = -3$; $D = 0 \quad \ldots. \quad (6)$

(5) sustituyendo en (3).

$$s_p = -t^3 - 3t \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

3° Sumando (3) y (7) se tiene la solución general:

$$s_g = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3\cos t + C_4\operatorname{sen} t - t^3 - 3t$$

6. $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 4\dfrac{dy}{dx} = 2x^2$ ..... (1)

1º $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 4\dfrac{dy}{dx} = 0$ .... (2)

$\Longrightarrow P(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda = \lambda(\lambda^2 - 4) = \lambda(\lambda + 2)(\lambda - 2) = 0$

$\Longrightarrow P(D) = D(D + 2)(D - 2) = 0$ .... (3)

las raíces son: 0; -2, 2, que nos dan el siguiente sistema fundamental de soluciones 1; e^{-2x}; e^{2x}.

$\Longrightarrow$ la solución complementaria es:

$$y_c = C_1 + C_2e^{4x} + C_3e^{-2x} \quad .... \quad (4)$$

2º El número 0 es raíz de (3) de orden 1 por lo tanto la forma de la solución particular será:

$$y_p = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx \quad .... \quad (5)$$

derivando (5):

$$\frac{dy}{dx} = 3Ax^2 + 2Bx + C \quad ..... \quad (6)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6Ax + 2B$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 6A \quad .... \quad (7)$$

sustituyendo (6) y (7) en (1) se tiene:

$$-12Ax^2 - 8Bx - 4C + 6A = 2x^2$$

igualando los coeficientes de la misma potencia de x tendremos:

$$A = -\frac{1}{6} \quad ; \quad B = 0 \quad ; \quad C = -\frac{1}{4} \quad ..... \quad (8)$$

(8) sustituyendo en (5)

$$y_p = -\frac{1}{6}x^3 - x \quad ..... \quad (9)$$

3º sumando (4) y (9) tendremos la solución general.

$$y_g = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{-2x} - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x$$

7. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = xe^{3x}$ ...... (1)

1º $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$

$\Longrightarrow p(D) = (D - 2)(D - 1) = 0$ .... (2)

las raíces son: 2; 1 y nos dan el siguiente sistema fundamental de soluciones: $e^{2x} - e^{x}$.

$\Longrightarrow$ la solución complementaria es:

$$y_c = C_1e^{x} + C_2e^{2x} \quad ..... \quad (3)$$

2º El número 0 no es raíz de (2), por lo tanto la forma de la solución particular es:

$$y_p = (Ax + B)e^{3x} \quad .... \quad (4)$$

derivando (4):

$$\frac{dy}{dx} = A(3x.e^{3x} + e^{3x}) + 3Be^{3x} \quad ... \quad (5)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A(9xe^{3x} + 2e^{3x}) + 98e^{3x} \quad ... \quad (6)$$

(4), (5); (6) sustituyendo en (1).

$2Axe^{3x} - (3A + 2B)e^{3x} = xe^{3x}$

igualando los coeficientes de la identidad se tiene

para $A = \dfrac{1}{2}$; $B = -\dfrac{3}{4}$ .... (7)

(7) sustituyendo en (4):

$$y_p = (\frac{1}{2}x - \frac{3}{4})e^{3x} \quad ..... \quad (8)$$

3º sumando (3) y (8)

$$y_g = C_1e^{x} + C_2e^{2x} + (\frac{1}{2}x - \frac{3}{4})e^{3x}.$$

INDICE

Este libro se terminó de imprimir
en los talleres gráficos de Editorial San Marcos situados en
Av. Las Lomas 1600, Urb. Mangomarca, S.J.L., Lima, Perú
RUC 10090984344